

BERICHTE  
aus dem  
**INSTITUT FÜR MEERESKUNDE**  
an der  
**CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT · KIEL**

Nr. 159

1 9 8 6

EIN NUMERISCHES MODELL ZUR UNTERSUCHUNG  
BAROKLINER ROSSBY-WELLEN IM NORDATLANTIK

von

Chresten Wübbert

DOI 10.3289/IFM-RR-159

Kopien dieser Arbeit können bezogen werden von:  
Institut für Meereskunde an der Universität Kiel  
Abt. Theoretische Ozeanographie  
Düsternbrooker Weg 20  
2300 Kiel 1 - FRG -

---

ISSN 0341 - 8561 -

# INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
EINLEITUNG	I
I. DAS PHYSIKALISCHE MODELL	5
II. DIE NUMERISCHE REALISIERUNG	18
II.1 Einführung	18
II.2 Die zeitliche Diskretisierung	19
II.3 Die spektrale Lösung der elliptischen Operatoren	23
II.4 Das Mehrgitterverfahren	36
II.5 Das zeitabhängige Problem	47
III. ERGEBNISSE DES ZEITABHÄNGIGEN MODELLS	54
III.1 Die massenerhaltende Randbedingung 1.16	54
III.2 Allgemeine Parameter	60
III.3 Ergebnisse	65
IV. ZUSAMMENFASSUNG	94

## ANHANG

Spektrale Auswertung der Flächenintegrale	APPENDIX A
Die räumliche Diskretisierung der elliptischen Operatoren	APPENDIX B
Die ILU-Zerlegung von $L_{ap}$	APPENDIX C
Konstruktion von $L_{ap}$ auf größeren Gittern	APPENDIX D
Vergleichslösungen mit massenerhaltender Randbedingung	APPENDIX E

## LITERATUR

## Zusammenfassung

Mit Hilfe neuer numerischer Techniken wird ein lineares, quasigeostrophisches Modell entwickelt, das die Beschreibung wind erzeugter, barokliner Rossby-Wellen in einem abgeschlossenen Becken mit Topographie und variablen Küstenlinien auf der Kugel gestattet. Dieses Modell wird angewendet auf den Nordatlantik zwischen  $5^{\circ}\text{N}$  und  $45^{\circ}\text{N}$ , wobei als Anregung der Jahresgang der Windschubspannung dient. Die großen räumlichen Skalen des Windfeldes führen zur ausschließlichen Anregung der baroklinen Wellen am Ostrand des Beckens. Es zeigt sich, daß der Mittelatlantische Rücken auf der  $\beta$ -Ebene eine weitgehende Abschirmung des Westatlantiks von der am Ostrand erzeugten Wellenaktivität bewirkt. Dieser Effekt wird bei Berücksichtigung der Kugelgeometrie südlich von  $25^{\circ}\text{N}$  vermindert. Durch den mit der geographischen Breite variierenden internen Rossby-Radius wird das Wellenfeld erheblich modifiziert. So nehmen die Ost-West-Wellenlängen zu niederen Breiten zu und werden bei  $10^{\circ}\text{N}$  größer als die Beckenbreite bei einer Phasengeschwindigkeit von  $10\text{ cm/sec}$  nordwärts sowie einer südwestlichen Gruppengeschwindigkeit von  $19\text{ cm/sec}$ .

## Summary

New numerical techniques are used to develop a linear, quasigeostrophic model describing wind induced, baroclinic Rossby-waves in a closed basin with topography and variable coastline geometry in spherical coordinates. The model is applied to the North Atlantic Ocean between  $5^{\circ}\text{N}$  and  $45^{\circ}\text{N}$ , using the annual cycle of the windstress curl as forcing function. Due to the large spatial scales of the windfield, Rossby-waves are only generated along the eastern coastline. On the  $\beta$ -plane, this wave-activity is confined to the part of the basin east of the Midatlantic Ridge. The blocking effect of the Midatlantic Ridge is reduced considerably at lower latitudes, when spherical coordinates are used. In this case, the meridional variation of the internal Rossby-radius leads to a strongly modified wave-field. The east-west wave length increases towards lower latitudes and exceeds the width of the basin at  $10^{\circ}\text{N}$ , thereby giving rise to a phase speed of  $10\text{ cm/sec}$  in northerly directions and a group velocity of  $19\text{ cm/sec}$  headed towards southwest.

## EINLEITUNG

Die Analysen verschiedener Datensätze durch EMERY und MAGAARD (1976), MAGAARD und PRICE (1977), PRICE und MAGAARD (1980), KANG und MAGAARD (1980), PRICE und MAGAARD (1983) sowie WHITE (1977) und WHITE (1982) haben zumindest für den Nordpazifik sehr eindeutig gezeigt, daß ein großer Teil der ozeanischen Variabilität im Periodenbereich von einem halben bis zu zehn Jahren und auf Längenskalen von einigen hundert Kilometern durch barokline Rossby-Wellen, die sich mit Phasengeschwindigkeiten von wenigen cm/sec vorwiegend nordwestwärts bewegen, erklärt werden kann. Seitdem hat es wiederholt Versuche gegeben, die Anregung dieser Wellen durch variable meteorologische Felder und andere, indirekte Antriebsmechanismen, sowie ihre Ausbreitung mit analytischen und numerischen Modellen zu simulieren. Diese Versuche lassen sich sehr grob in zwei Klassen einteilen. In der einen werden die antreibenden meteorologischen Felder als stochastische Variablen angesehen (zur Begründung siehe z.B. WILLEBRAND, 1981) und mittels des zugrunde liegenden physikalischen Modells die Reaktion des Ozeans bestimmt. So zeigte MAGAARD (1977), daß Luftdruckschwankungen im Vergleich zu Fluktuationen der Windschubspannung und der Auftriebsflüsse von untergeordneter Bedeutung für die direkte Anregung barokliner Rossby-Wellen sind. Dies wurde bestätigt von FRANKIGNOUL und MÜLLER (1979 a, 1979 b), die weitergehend feststellten, daß auch die Anregung durch Auftriebsflüsse für Perioden kleiner als hundert Jahre vernachlässigbar ist gegenüber der durch variable Windschubspannungen. Diese Ergebnisse beziehen sich alle auf einen horizontal unbegrenzten Ozean.

Den zusätzlichen Einfluß einer meridionalen östlichen Berandung auf windgetriebene, barokline Rossby-Wellen beschreiben LIPPERT und KÄSE (1985). Sie zeigen, daß dadurch die Energie der Wellen monoton mit dem Abstand von der Küste zunimmt, wie es auch den von MAGAARD (1982) zusammengetragenen Beobachtungen entspricht. Schließlich werden diese Ergebnisse von LIPPERT (1986) verallgemeinert auf beliebig geneigte, aber gerade östliche Küsten, sowie auf die Berücksichtigung schwacher barotroper Grundströmungen. Beide Effekte haben einen teilweise erheblichen Einfluß auf die Ausbreitungseigenschaften barokliner Rossby-Wellen, so daß die Vermutung naheliegt, daß zur vollständigen Beschreibung dieses Phänomens die Vorgabe einer realistischen Küstenkonfiguration wesentlich ist.

Allerdings ist dies wegen des analytischen Charakters dieser Modell-Klasse wohl nicht möglich.

In der zweiten Klasse von Modellen werden die meteorologischen Felder als deterministische Größen angesehen und abgesehen von den Untersuchungen von Einschwingvorgängen, wie z.B. ANDERSON et al. (1979), wird ein zeitlich periodisches Windfeld vorgegeben. Auch andere Anregungsmechanismen werden am Ostrand der jeweiligen Ozeane betrachtet. BRYAN und RIPA (1978) simulieren z.B. sehr langperiodische Wellen, die durch am Ostrand reflektierte Temperaturanomalien entstehen. WHITE und SAUR (1983) geben für langperiodische Wellen zwei verschiedene mögliche Ursachen an, nämlich südlich von  $30^{\circ}\text{N}$  durch polwärts wandernde Kelvin-Wellen und nördlich von  $30^{\circ}\text{N}$  durch Variationen im Windfeld. MYSAK (1983) erhält in vielen Aspekten gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von KANG und MAGAARD (1980) für Rossby-Wellen mit Jahresperiode, die von einem fluktuierenden östlichen Randstrom bei  $48^{\circ}\text{N}$  erzeugt werden. WHITE und SAUR (1981) geben wiederum stark variable Windschubspannungen im küstennahen Bereich als Ursache für Rossby-Wellen mit Jahresperiode südlich von  $40^{\circ}\text{N}$  an. Bei der Verifikation der Beobachtungen längs des Großkreises San Francisco-Honolulu spielt hier die Berücksichtigung der realen Küstenkontur ebenso wie die Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters eine entscheidende Rolle. Dies konnte mit einem vollständigeren numerischen Modell des Nordpazifik für winderzeugte Rossby-Wellen mit Jahresperiode von CUMMINS, MYSAK und HAMILTON (1986) bestätigt werden.

Mit Ausnahme der Arbeiten von LIPPERT und KÄSE (1985) und LIPPERT (1986) beziehen sich alle hier genannten Untersuchungen auf den Nordpazifik. Für den Nordatlantik fehlen entsprechende Untersuchungen fast vollständig - möglicherweise aufgrund des Mangels an entsprechendem Beobachtungsmaterial. Erst in einer neueren Arbeit von PRICE und MAGAARD (1986) werden historische Datensätze mit ähnlichen Analysemethoden wie im Nordpazifik systematisch auf barokline Rossby-Wellen hin untersucht. Allerdings lassen die vorliegenden Daten nur Analysen im Periodenbereich von fünf bis zehn Jahren zu. Im Vergleich zum Pazifik scheinen die Wellen in diesem Periodenbereich einen erheblich geringeren Anteil an der gesamten

Variabilität zu haben, obwohl ihre Amplitude etwa fünfmal so groß ist. Eine Ursache dafür könnte eine erhöhte Wirbelaktivität im Atlantik sein, die das Rossby-Wellen-Feld überdeckt. Außerdem wurden in dieser Untersuchung weder die komplexe Bodentopographie des Nordatlantik noch mittlere Strömungen berücksichtigt.

In einem ersten Versuch zur Modellierung barokliner Rossby-Wellen mit Jahresperiode stellten KRAUSS und WÜBBER (1982 a) ein einfaches numerisches Modell für nordatlantische Verhältnisse zwischen  $5^{\circ}\text{N}$  und  $31^{\circ}\text{N}$  vor. Als Anregung diente ein idealisiertes Windfeld in einem schmalen Streifen längs des Ostrandes des rechteckigen, ebenen Modellozeans. Dieses Modell hatte im Gegensatz zu den meisten oben zitierten Modellen eine hohe vertikale Auflösung. Die Ergebnisse dieses Versuchs lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Neben einer schwachen barotropen Zirkulation wurden fast ausschließlich barokline Rossby-Wellen der ersten vertikalen Ordnung mit einer Wellenlänge von 1800 km und einer Phasenausbreitung in Richtung  $288^{\circ}$  mit 5,8 cm/sec angeregt. Die maximalen Strömungsgeschwindigkeiten außerhalb des östlichen Anregungsgebietes betrugen etwa 1 cm/sec. Diese Zahlen stehen in einem bemerkenswerten Gegensatz zu den aus Beobachtungen gewonnenen Größen im Pazifik. Hierfür geben KANG und MAGAARD (1980) Wellenlängen von 300 km und typische Phasengeschwindigkeiten von 1 cm/sec, ebenfalls in nordwestlicher Richtung, sowie zum Teil erheblich größere Strömungsgeschwindigkeiten an. Eine mögliche Erklärung dieser Diskrepanz liegt in der starken Abhängigkeit der Ausbreitungseigenschaften von Rossby-Wellen von der geographischen Breite (SCHOPF et al., 1981). Während KRAUSS und WÜBBER (1982 a) für ihre Rechnungen Parameter repräsentativ für  $18^{\circ}\text{N}$  wählten, fanden die Untersuchungen von KANG und MAGAARD (1980) zwischen  $30^{\circ}\text{N}$  und  $40^{\circ}\text{N}$  statt.

Eine ausführliche Beschreibung dieses Modells findet sich bei KRAUSS und WÜBBER (1982 b,c). Es entstand im Sonderforschungsbereich "Warmwassersphäre des Atlantiks" unter dem Projekt-Titel "Spektralmodell des Nordatlantiks". Eine der Zielsetzungen dieses Projekts war die Erprobung neuer numerischer Algorithmen, um so möglicherweise im Vergleich zu herkömmlichen

ozeanographischen Modellen Rechenzeit zu sparen. Dieses Ziel wurde für das sehr idealisierte Modell von KRAUSS und WÜBBER (1982 a) mit Hilfe von spektralen Methoden auch erreicht. Allerdings ließ sich dieses Konzept nur sehr schwer auf die Berücksichtigung wenigstens einiger der oben erwähnten, für Rossby-Wellen als wesentlich erachteten Effekte erweitern. Einige dieser Schwierigkeiten beschreibt BÖNING (1985).

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, ein Modell der windgetriebenen Rossby-Wellen mit Jahresperiode unter Einbeziehung realistischer Küsten und Topographie sowie der Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters in einem Modell-Atlantik von 5°N bis 45°N mit Hilfe eines neuen numerischen Konzeptes zu erstellen.

Die wesentlichen Komponenten des numerischen Konzeptes sind zum einen ein verallgemeinertes implizites Zeitschrittverfahren, zum anderen Mehrgitterverfahren (siehe BRANDT, 1984) mit pseudo-spektraler Defekt-Korrektur (siehe ORSZAG, 1979) für die zu jedem Zeitschritt zu invertierenden elliptischen Operatoren. Diese Verfahren sind bislang nicht in ozeanographischen Modellen verwendet worden. Daher wird das zugrunde liegende physikalische Modell so einfach wie möglich gehalten und die Beschreibung der numerischen Realisierung einen relativ breiten Raum einnehmen. Die Ergebnisse, die sowohl unter ozeanographischen wie auch numerischen Gesichtspunkten diskutiert werden, sollen einen Beitrag zum Verständnis des Phänomens der Rossby-Wellen im Nordatlantik leisten.

## I. DAS PHYSIKALISCHE MODELL

In diesem Kapitel wird das physikalische Modell mit seinen beschreibenden Gleichungen vorgestellt und eine vorläufige Diskussion seiner Grenzen geführt. Als alleinige antreibende Kraft wird eine räumlich und zeitlich variable Windschubspannung an der Meeresoberfläche angesehen, die als bekannte Funktion vorausgesetzt wird. Anders als bei KRAUSS und WÜBBER (1982 a) wird auf eine explizite Beschreibung der oberflächennahen Ekman-Reibungsgrenzschicht verzichtet. Der Einfluß des Windes wird also nur in der Form einer an der Untergrenze der Ekman-Schicht aus der Konvergenz bzw. Divergenz des Ekman-Transportes resultierende Vertikalgeschwindigkeit  $w_E$  berücksichtigt. Dies ist für die zu betrachtende Jahresperiode sicherlich eine gute Näherung (siehe z.B. Gill, 1982).

Das Innere des Ozeans wird beschrieben durch die linearen Flachwassergleichungen auf der rotierenden Erde in der Boussinesq-Approximation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v = - \frac{1}{\rho_0 \alpha \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad 1.1$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u = - \frac{1}{\rho_0 \alpha} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad 1.2$$

$$\frac{1}{\alpha \cos \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (v \cos \varphi) \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad 1.3$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - g \rho \quad 1.4$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - w \frac{d\rho}{dz} \quad 1.5$$

zusammen mit den Randbedingungen in der Vertikalen:

$$w = w_E = \nabla \times \left( \frac{\vec{\tau}}{\rho_0 f} \right) \quad z = 0 \quad 1.6$$

$$w = u \cdot \frac{1}{\alpha \cos \varphi} \frac{\partial b}{\partial \lambda} + v \cdot \frac{1}{\alpha} \frac{\partial b}{\partial \varphi} \quad z = -H \quad 1.7$$

wobei die tatsächliche Wassertiefe sich ergibt zu  $H(\lambda, \varphi) = H_0 - b(\lambda, \varphi)$



Das zugehörige Koordinatensystem ist:

- $\lambda$  - geographische Länge, positiv ostwärts
- $\varphi$  - geographische Breite, positiv nordwärts
- $z$  - Tiefe, positiv aufwärts

Die weiteren Größen haben folgende Bedeutung:

- |                                                  |                                            |
|--------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| $f = 2 \Omega \sin \varphi$                      | - Coriolisparameter                        |
| $\Omega = 2.2921 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ | - Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation    |
| $a = 6371 \text{ km}$                            | - mittlerer Erdradius                      |
| $g = 979 \text{ cm} \cdot \text{sec}^{-2}$       | - Erdbeschleunigung (für 25°N)             |
| $\rho_0$                                         | - Boussinesq-Referenzdichte                |
| $\bar{\rho}(z)$                                  | - mittleres vertikales Dichteprofil        |
| $\vec{\tau}(\lambda, \varphi, t)$                | - Vektor der Windschubspannung             |
| $w_E(\lambda, \varphi, t)$                       | - Ekman-Geschwindigkeit                    |
| $H_0 = \text{const}$                             | - mittlere Wassertiefe                     |
| $b(\lambda, \varphi)$                            | - Abweichung von der mittleren Wassertiefe |
| $u(\lambda, \varphi, z, t)$                      | - Geschwindigkeitskomponente ostwärts      |
| $v(\lambda, \varphi, z, t)$                      | - Geschwindigkeitskomponente nordwärts     |
| $w(\lambda, \varphi, z, t)$                      | - Geschwindigkeitskomponente aufwärts      |
| $P(\lambda, \varphi, z, t)$                      | - Druckstörung                             |
| $S(\lambda, \varphi, z, t)$                      | - Dichtestörung                            |

Diese Gleichungen sind, insbesondere im Hinblick auf ihre Wellenlösungen, ausführlich bei PHILANDER (1978) diskutiert. Sie beschreiben kleine Störungen eines ansonsten ruhenden Ozeans  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \equiv 0$ , der sich im hydrostatischen Gleichgewicht mit der mittleren Dichteschichtung befindet:

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = -g\bar{\rho}$$

Bis auf den vertikalen Impulsaustausch, die Boussinesq-Approximation und die  $\beta$ -Ebenen-Formulierung sind die Gleichungen 1.1 - 1.5 identisch mit denen von KRAUSS und WÜBBER (1982 a,b,c). In der vorliegenden Arbeit wird zunächst auf die Spezifizierung einer inneren Dissipation verzichtet um die folgende Ableitung übersichtlicher zu halten. Die Ergebnisse von KRAUSS und WÜBBER (1982 a) legen nun einige weitere Vereinfachungen nahe. Dort ließ sich die Reaktion des Ozeans auf den Jahresgang des Windfeldes in sehr guter Näherung beschreiben durch einen barotropen Anteil sowie barokline Rossby-Wellen der ersten vertikalen Wellenordnung. Daher wird hier auf eine hohe vertikale Auflösung verzichtet und es werden lediglich diese beiden Anteile berücksichtigt. Desweiteren werden die im Gleichungssystem 1.1 - 1.5 enthaltenen Schwere- und Trägheitswellen durch die Annahme quasi-geostrophischer Bewegungen eliminiert.

Aus den Gleichungen 1.1 und 1.2 erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f^2 u = -\frac{f}{\rho_0 a} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho_0 a \cos \varphi} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial \lambda}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f^2 v = \frac{f}{\rho_0 a \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} - \frac{1}{\rho_0 a} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial \varphi}$$

Für Perioden  $T \gg f^{-1}$ , was für 1 Jahr sehr gut erfüllt ist, und unter der Annahme, daß die horizontalen Skalen der Bewegungen in  $\varphi$  und  $\lambda$

vergleichbar sind, erhält man zusammen mit der Kontinuitätsgleichung 1.3 das folgende quasi-geostrophische System:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 \rho + \frac{\beta}{\alpha \cos \varphi} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} = f_0 f^2 \frac{\partial w}{\partial z} \quad 1.8$$

$$f u = - \frac{1}{f_0 \alpha} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \quad 1.9$$

$$f v = \frac{1}{f_0 \alpha \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \quad 1.10$$

wobei ist

$$\nabla_H^2 = \frac{1}{\alpha^2 \cos \varphi} \left( \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}) \right) , \quad \beta = \frac{2 \Omega \cos \varphi}{\alpha}$$

Für die vertikale Diskretisierung wird die von FLIERL (1978) beschriebene Methode angewendet, wobei mittels einer Galerkin-Approximation eine direkte Projektion des kontinuierlichen Problems auf barotrope und erste vertikale Eigenfunktionen der mittleren Dichteschichtung erreicht wird. Dies hat den Vorteil, daß dadurch keine weiteren freien Parameter eingeführt werden, so daß diese Methode im Vergleich zu einem Schichten-Modell eine optimale Kalibrierung für die verbleibenden zwei vertikalen Freiheitsgrade darstellt.

Die Eigenfunktionen der mittleren Dichteschichtung werden beschrieben durch

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{1}{N^2} \frac{dz_h}{dz} \right) + \lambda_h \cdot z_h = 0 \quad , \quad \frac{dz_h}{dz} = 0 \quad \text{für } z = 0, -H_0 \quad 1.11$$

sowie 
$$N^2 = - \frac{g}{f_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}$$

Dabei soll vorausgesetzt werden, daß die Lösungen von 1.11 normiert sind gemäß

$$\frac{1}{H_0} \int_{-H_0}^0 z_n \cdot z_m \, dz = \delta_{n,m}$$

Daraus folgt zusammen mit 1.11  $z_0(z) = 1$ ,  $\lambda_0 = 0$ .

Für die Separation von  $P$  in der Form

$$P(\lambda, \varphi, z, t) = \sum_{m=0}^M P_m(\lambda, \varphi, t) \cdot z_m(z)$$

liefert die Galerkin-Approximation für die  $m$ -te Eigenfunktion  $z_m(z)$ , d.h. das mit  $z_m(z)$  gewichtete vertikale Mittel der Gleichung 1.8, unter Verwendung von 1.4 und 1.5

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 P_m + \frac{\beta}{a \cos \varphi} \frac{\partial P_m}{\partial \lambda} = f^2 z_m \frac{\partial P_m}{\partial t} + \frac{g_0 f^2}{H_0} \left[ z_m \cdot W \right]_{-H_0}^0$$

Zusammen mit den Randbedingungen 1.6 und 1.7 erhält man für  $M=1$  schließlich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 P_0 + \frac{\beta}{a \cos \varphi} \frac{\partial P_0}{\partial \lambda} + f z_{00} \mathcal{J}(P_0, b) \\ + f z_{10} \mathcal{J}(P_1, b) = W_0 \end{aligned} \quad 1.12$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \nabla_H^2 P_1 - f^2 \lambda_1 P_1 \right] + \frac{\beta}{a \cos \varphi} \frac{\partial P_1}{\partial \lambda} + f z_{11} \mathcal{J}(P_1, b) \\ + f z_{10} \mathcal{J}(P_0, b) = W_1 \end{aligned} \quad 1.13$$

mit den Abkürzungen für  $a=0,1$ :

$$\mathcal{J}(P_i, b) = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial P_i}{\partial \lambda} \cdot \frac{1}{a} \frac{\partial b}{\partial \varphi} - \frac{1}{a} \frac{\partial P_i}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial b}{\partial \lambda}$$

$$z_{i,j} = \frac{z_i(-H_0) \cdot z_j(-H_0)}{H_0} \quad , \quad W_i = \frac{g_0 f^2}{H_0} z_i(0) \cdot W_E$$

Dies sind die bis auf die Spezifizierung eines Dissipationsmechanismus vollständigen Modell-Gleichungen. Es sind hierfür in vergleichbaren Modellen sehr unterschiedliche Formen verwendet worden. In einem Vergleich verschiedener Ansätze erzielen MÜLLER und FRANKIGNOUL (1981) in Zusammenhang mit einem stochastischen Modell mit einer skalenunabhängigen modifizierten Rayleigh-Reibung die beste Übereinstimmung mit den Beobachtungen im MODE-Gebiet. LIPPERT und KÄSE (1985) dagegen benutzen, ebenfalls in einem stochastischen Modell, vertikalen Impulsaustausch, der zu einer sowohl von den horizontalen Skalen als auch von der vertikalen Wellenordnung abhängigen Dämpfung führt, die barotrope Komponente dagegen unberührt läßt. Mit den gleichen effektiven Auswirkungen verwenden MYSAK und MAGAARD (1983) eine reine Rayleigh-Reibung. Schließlich verwenden KRAUSSS und WÜBBER (1982a,b) ebenfalls vertikalen Impulsaustausch, jedoch mit anderen Annahmen über die vertikale Abhängigkeit des Austauschkoeffizienten als LIPPERT und KÄSE (1985), sowie eine zusätzliche Dämpfung für den barotropen Anteil. In der vorliegenden Arbeit wird ähnlich verfahren, wobei allerdings im Gegensatz zu den oben zitierten analytischen bzw. halbanalytischen Modellen auch numerischen Gesichtspunkte zu berücksichtigen sind.

Die Gleichungen 1.12 und 1.13 werden jeweils vervollständigt zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_H^2 p_0 + \frac{\beta}{a \cos \varphi} \frac{\partial p_0}{\partial \lambda} + f z_{\infty} J(p_0, b) + R_0 \nabla_H^2 p_0 + f z_{10} J(p_1, b) = w_0 \quad 1.14$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\nabla_H^2 p_1 - f^2 \lambda_1 p_1] + \frac{\beta}{a \cos \varphi} \frac{\partial p_1}{\partial \lambda} + f z_{11} J(p_1, b) + R_1 \nabla_H^2 p_1 + f z_{10} J(p_0, b) = w_1 \quad 1.15$$

Diese Form der Reibung hat den Vorteil, daß sie numerisch sehr einfach zu behandeln ist, da sie die Ordnung des Systems nicht erhöht. Um den Effekt

der Reibung auf die freien Wellen des Systems abschätzen zu können, seien diese für den stark vereinfachten Fall der  $\beta$ -Ebene bei ebenem Boden betrachtet. Dafür enthalten 1.14 und 1.15 gedämpfte Wellen der Form

$$p_j = \tilde{p}_j e^{i(\omega t - \alpha x - \gamma y)} \cdot e^{-Dt}, \quad j = 0, 1$$

woraus sich die Dispersionsrelation und Dämpfungszeitkonstanten ergeben zu

$$\omega = \frac{-\beta_0 \alpha}{\alpha^2 + \gamma^2 + f_0^2 \lambda_j}, \quad D = R_j \cdot \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2 + f_0^2 \lambda_j}$$

Für rein zonal wandernde Wellen mit Jahresperiode, d.h.  $\omega = 2.02 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^{-1}$  und für Parameter entsprechend  $25^\circ\text{N}$ , d.h.  $f_0 = 6.16 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$ ,  $\beta_0 = 2 \cdot 10^{-13} \text{ sec}^{-1} \text{ cm}^{-1}$ ,  $\lambda_j = 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^2 \text{ cm}^{-4}$  ergeben sich dann jeweils zwei mögliche Wellenzahlen für barotrope und barokline Wellen.

### 1.) barokline Wellen

Hierfür erhält man  $\alpha_1 = -9.2 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$ ,  $\alpha_2 = -0.7 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$ . Dem entsprechen Wellenlängen von 68 km und 897 km und Gruppengeschwindigkeiten von 0,18 cm/sec (ostwärts) sowie 2,47 cm/sec (westwärts). Es ist klar, daß die kurzen Wellen im numerischen Modell nicht aufgelöst werden können, so daß diese möglichst effektiv gedämpft werden sollen. Andererseits sollten die langen Wellen, denen hier das eigentliche Interesse gilt, in der Lage sein, den Atlantik, d.h. eine Weglänge von etwa 5000 km, ohne größere Reibungsverluste zu durchqueren. Diese Forderungen führen auf einen Kompromiß von  $R_j = 10^{-8} \text{ sec}^{-1}$ , woraus sich wiederum Dämpfungszeitskalen ( $D^{-1}$ ) von 120 Tagen für die kurzen und 4,5 Jahren für die langen Wellen ergeben. Diese Dämpfungszeitskalen entsprechen denen von LIPPERT und KÄSE (1985) und MYSAK und MAGAARD (1983). Es zeigt sich aber, daß dadurch nicht alle kurzen Wellen eliminiert werden können (siehe

Kapitel III), so daß eine stärker skalenselektive Dämpfung wünschenswert erscheint. Dies ist nur mit einer Reibung höherer Ordnung möglich, die hier aber nicht betrachtet werden soll.

## 2.) barotrope Wellen

Mit  $\lambda_0 = 0$  werden hier  $\alpha_1 = -9.9 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$  und  $\alpha_2 = 0$ , woraus sich für die kurzen Wellen 63 km Wellenlänge ergibt. Auch diese Wellen müssen aus numerischen Gründen eliminiert werden. Versuche ergaben, daß dies erst mit  $R_0 = 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$  entsprechend einer Dämpfungszeitskala von etwa 11 Tagen erreicht werden kann. Damit enthält das System praktisch keine barotropen Wellen mehr, so daß die barotrope Reaktion des Ozeans im wesentlichen aus einer zeitabhängigen Sverdrup-Zirkulation, die durch einen westlichen Randstrom geschlossen wird, besteht. Die Breite dieses Randstroms ( $\sim R_0 / \beta_0$ ) beträgt mit  $R_0 = 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$  etwa 50 km. Dies ist ein durchaus realistischer Wert, der allerdings auch an der Grenze der numerischen Möglichkeiten dieses Modells liegt.

Diese grobe Abschätzung der zu erwartenden Raum- und Zeitskalen berücksichtigt weder die Modifikationen durch Topographie noch die Abhängigkeit von  $f$  und  $\lambda$  von der geographischen Breite. Letzteres ist für die kurzen barotropen Wellen nicht von wesentlicher Bedeutung, hat aber erheblichen Einfluß auf die baroklinen Wellen. Deren West-Ost-Wellenlänge nimmt für höhere Breiten tendenziell ab für die langen Wellen und nimmt zu für die kurzen, bis sie bei der für die Jahresperiode kritischen Breite, die durch

$$\cot(\varphi_{krit}) = 2 \cdot \omega \cdot a \cdot \sqrt{\lambda_1}$$

gegeben ist (LeBLOND und MYSAK, 1978), gleich werden. Für den gewählten Eigenwert  $\lambda_1$  ist dies bei etwa 44°N mit einer Wellenlänge von 155 km der Fall. Die daraus mit  $R_1$  resultierende Dämpfungszeitskala ist mit 232 Tagen

sehr kurz. Allerdings wird dort die Gruppengeschwindigkeit zu Null, so daß sich daraus kein numerisches Problem ergibt. Jedoch wird die Aussagefähigkeit des Modells in höheren Breiten wegen der schlechten räumlichen Auflösung und der hohen Dämpfung beschränkt sein. Eine weitere Einschränkung in seinem Gültigkeitsbereich erfährt das Modell durch die Annahme einer mittleren Dichteschichtung  $\bar{\rho}(z)$ . Daraus ergibt sich der Eigenwert  $\lambda_1$  und daraus der für die Ausbreitungseigenschaften barokliner Rossby-Wellen maßgebliche interne Rossby-Radius

$$R_i = (f^2 \lambda_1)^{-1/2}$$

Eine aus historischen Daten gewonnene geographische Verteilung von  $R_i$  für den Nordatlantik ist bei EMERY et al. (1984) wiedergegeben. Sie zeigt neben dem in Nord-Süd-Richtung dominierenden Einfluß von  $f$  auch erhebliche Unterschiede in der zonalen Verteilung von  $R_i$ , besonders nahe der Küsten. Sieht man trotzdem von dieser Variabilität in Ost-West-Richtung ab indem man ein zonales Mittel bildet, so läßt sich daraus nach der Korrektur mit  $f$  eine meridionale Verteilung der Eigenwerte  $\lambda_1$  bestimmen.

Das Ergebnis ist in Tabelle I.1 zusammengefaßt und zeigt ein Minimum zwischen 25°N und 30°N sowie einen systematischen Anstieg sowohl nach Norden als auch nach Süden bis 5°N. Legt man diese Daten zugrunde, so läßt sich eine mittlere Dichteschichtung allenfalls südlich 40°N annehmen mit einem Eigenwert von etwa  $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^2 \text{ cm}^{-2}$ . Dies ist keine sehr starke Einschränkung, da damit die kritische Breite der Rossby-Wellen mit Jahresperiode auf 43°N festgelegt ist - jedoch hat ein darauf beruhendes Modell die Eigenschaft, eine geringere Abnahme des internen Rossby-Radius nach Norden und eine zu starke Zunahme nach Süden wiederzugeben als es den Daten entspricht.

Die hier gewählten Grenzen des Modell-Ozeans liegen bei 5°N und 45°N und entsprechen damit den obigen Einschränkungen. Als mittlere Dichteschichtung wurde ein beckenweites Mittel des Levitus-Datensatzes (LEVITUS, 1982) zwischen 5°N und 45°N genommen. Diese Dichteschichtung sowie die verwendeten Eigenfunktionen  $z_0$  und  $z_1$  sind in Abb. Ia, b wiedergegeben.

Der zugehörige barokline Eigenwert ist  $\lambda_1 = 1,68 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^2 \text{ cm}^{-2}$ .



$\varphi$ °N	$R_i$ [km]	$\lambda_i$ [ $10^5 \text{ sec}^2 \text{ km}^{-2}$ ]
0 - 5	389,9	1,65
5 - 10	115,4	2,07
10 - 15	74,8	1,79
15 - 20	55,5	1,69
20 - 25	47,7	1,42
25 - 30	40,5	1,34
30 - 35	32,4	1,55
35 - 40	25,1	2,01
40 - 45	17,8	3,25
45 - 50	15,0	3,85
50 - 55	9,7	8,03
55 - 60	7,7	11,10

Tab. I.1 Zonales Mittel der internen Rossby-Radien und Eigenwerte (nach EMERY et al., 1984)

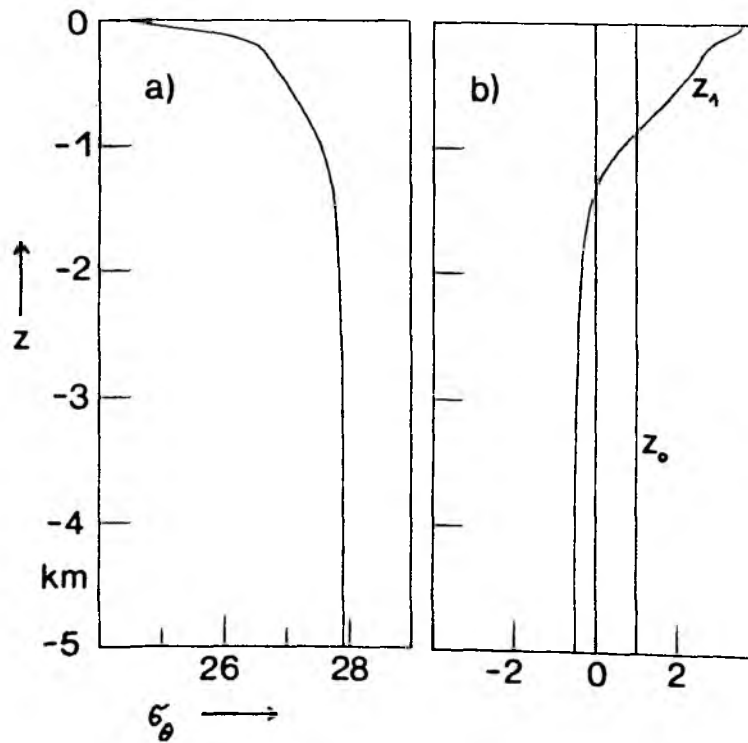


Abb. I.1 a) Mittleres Dichteprofil im Atlantik, 5°N - 45°N  
b) Vertikale Eigenfunktionen  $z_0$ ,  $z_1$  zu a)

Zur vollständigen Beschreibung des Modells fehlen noch die horizontalen Randbedingungen. Die westlichen und östlichen Ränder erfordern als feste Küsten das Verschwinden der küstennormalen Komponente des Geschwindigkeitsvektors. Die künstlichen Ränder im Süden und Norden dagegen lassen im Prinzip verschiedene Randbedingungen zu. So setzen KRAUSS und WÜBBER (1982) alle Felder stetig differenzierbar fort und fordern für das so verdoppelte Gebiet periodische Randbedingungen. Dies beinhaltet gewisse Schwierigkeiten bei der korrekten Darstellung der Gradienten der planetarischen Vorticity (MYSAK, 1983) und läßt sich nicht auf die hier verwendete Kugelgeometrie ausdehnen. Eine andere Möglichkeit ist die Vorgabe einer Ausstrahlungsbedingung für Wellen, so daß keine Reflexionen auftreten (CAMERLENGO und O'BRIEN, 1980). CUMMINS et al. (1986) berichten aber, daß diese Bedingungen für Rossby-Wellen zu sehr unbefriedigenden Ergebnissen führen und wählen stattdessen eine Dämpfungszone mit hoher Reibung längs des Randes, der ansonsten als fester Rand behandelt wird. In dieser Arbeit werden die südlichen und die nördlichen Ränder ebenfalls als fest angesehen und es zeigt sich, daß auf Dämpfungszone verzichtet werden kann, wenn man eine geringe Reibung wie oben spezifiziert im gesamten Inneren des Modell-Ozeans zuläßt.

Der vollständig geschlossene Rand führt dann mit der quasi-geostrophischen Annahme 1.9, 1.10 auf die Randbedingung

$$P = A(t) \quad \text{auf dem Rand}$$

und mit der Zerlegung der Eigenfunktionen in der Vertikalen auf

$$p_0 = B(t) , \quad p_1 = C(t) \quad \text{auf dem Rand}$$

Wie McWILLIAMS (1978) gezeigt hat, ist  $B(t)$  dynamisch irrelevant. Dies wird auch sofort an Gleichung 1.14 deutlich, die zeigt, daß eine additive räumliche Konstante in  $p_0$  die Gesamtlösung unverändert läßt. Dies ist für  $p_1$  nicht der Fall. McWILLIAMS zeigt weiter, daß  $C(t)$  aus der Forderung resultiert, daß die Gesamtmasse des geschlossenen Ozeans

erhalten bleibt. Die Massenerhaltung führt wiederum auf die Forderung, daß der beckenweite Mittelwert der Vertikalgeschwindigkeit auf jeder horizontalen Fläche zu Null werden muß.

Aus den Gleichungen 1.4, 1.5 erhält man für  $w$

$$w = - \frac{1}{\rho_0 N^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial z} = - \frac{1}{\rho_0 N^2} \frac{dz}{dz} \frac{\partial p}{\partial t}$$

so daß zu fordern ist

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial p}{\partial t} d\Delta = 0, \text{ d.h. } \iint_{\Delta} p_1 d\Delta = \iint_{\Delta} p_1 d\Delta \Big|_{t=0} = \tilde{c} = \text{const.}$$

wobei sich die Integration über die Fläche des Modell-Ozeans erstreckt. Wird das Modell aus einem ruhenden Anfangszustand heraus betrieben, so ist  $\tilde{c} = 0$ .

Für diesen Fall lauten die vollständigen Randbedingungen:

$$p_0 = 0, \quad p_1 = C(t) \text{ mit } C(t) \text{ so, da\ss } \iint_{\Delta} p_1 d\Delta = 0 \quad 1.16$$

Es zeigt sich, daß diese Randbedingungen gerade in Bezug auf die Anregung barokliner Rossby-Wellen nicht unproblematisch sind, da mit 1.16 die Möglichkeit besteht, lokale Effekte des Windes in Küstennähe durch die integrale Bedingung in 1.16 zu ersetzen oder zu überlagern. Dieser Aspekt wird in Kapitel III ausführlich diskutiert und es werden dort zu Vergleichszwecken auch Rechnungen mit  $C(t) \equiv 0$  vorgestellt. Desweiteren werden in Kapitel III Ergebnisse des Systems 1.14 - 1.16 mit denen des entsprechenden Systems auf der  $\beta$ -Ebene verglichen. Die zugehörigen Gleichungen erhält man formal durch Übergang zu den lokalen kartesischen Koordinaten

$$x = a \cos \varphi_0 \cdot \lambda, \quad y = a \varphi$$

sowie eine Entwicklung der trigonometrischen Funktionen um die Bezugsbreite  $\varphi_0$ . Die entsprechenden Ausdrücke für  $\beta$  und  $f$  sind

$$f_0 = 2 \cdot \Omega \cdot \sin \varphi_0, \quad \beta_0 = \frac{2 \cdot \Omega \cdot \cos \varphi_0}{a}$$

Damit ist die vorläufige Diskussion des physikalischen Modells und seiner wesentlichen Parameter abgeschlossen. Für einige Beispiele wird noch eine vereinfachte Form von 1.14 - 1.16 benötigt. Beschränkt man die Vertikalabhängigkeit auf die barotrope Eigenfunktion, so entspricht die Galerkin-Approximation einer einfachen vertikalen Mitteilung der Gleichung 1.8. Das Resultat ist im stationären Fall auf der  $\beta$ -Ebene die für Topographie modifizierte Stommel-Gleichung (siehe VERONIS, 1981):

$$R_0 \nabla_H^2 P_0 + \beta_0 \frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{f_0}{H_0} \left( \frac{\partial P_0}{\partial x} \cdot \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} \right) = \frac{S_0 f_0^2}{H_0} W_E \quad 1.17$$

$$P_0 = 0 \quad \text{auf dem Rand.}$$

Diese Gleichung läßt sich wegen des Topographie-Terms im Allgemeinen nicht weiter separieren. Um trotzdem zu einem eindimensionalen Beispiel zu kommen, wird hier gesetzt  $\frac{\partial b}{\partial x} = 0$ ,  $\frac{\partial b}{\partial y} = g(x)$  mit einer fiktiven "Bodenneigung"  $g(x)$ . Für

$$W_E = \sin\left(\frac{\pi}{B} \cdot y\right), \quad P_0 = p(x) \sin\left(\frac{\pi}{B} y\right)$$

erhält man dann aus 1.17

$$R_0 \frac{d^2 p}{dx^2} + \left( \beta + \frac{f_0}{H_0} g(x) \right) \frac{dp}{dx} - R_0 \left( \frac{\pi}{B} \right)^2 p = \frac{S_0 f_0^2}{H_0} \quad 1.18$$

$$p(0) = p(L) = 0.$$

1.18 beschreibt natürlich kein reales Zirkulations-Problem, beinhaltet aber viele der Merkmale, die die numerische Lösung der vollständigen Gleichungen schwierig macht. Dieses sind vor allem die im Vergleich zum Hauptteil der Gleichungen sehr großen planetarischen und topographischen  $\beta$ -Terme. Die numerische Realisierung des vollständigen Modells wird im folgenden Kapitel II beschrieben.

## II. DIE NUMERISCHE REALISIERUNG

### II.1 Einführung

Trotz der relativ einfachen Struktur des Gleichungssystems 1.14 - 1.16 ist eine Lösung für realistische Bodentopographie und Windfelder nur numerisch möglich. Da zudem fortschreitende Wellen beschrieben werden sollen, kommt der Güte der numerischen Approximation eine besondere Bedeutung zu, weil - wie O'BRIEN und GROTHJAHN (1976) gezeigt haben - die durch endliche Auflösung bedingte numerische Dispersion zu erheblichen Fehlern in der Wiedergabe der Ausbreitungseigenschaften der Wellen führen kann.

In dieser Situation bieten sich spektrale Methoden zur Darstellung der räumlichen Abhängigkeiten an, die auch bei einer geringen Anzahl von Freiheitsgraden gute numerische Approximationen liefern. Spektrale Lösungsverfahren für Differentialgleichungen sind auf sehr unterschiedliche Art und Weise entwickelt worden. Einen Überblick über die prinzipiellen Formen geben GOTTLIEB und ORSZAG (1977). Allen Verfahren gemeinsam ist die Darstellung der numerischen Lösung als endliche Summe globaler Entwicklungsfunktionen, wobei die bekannten funktionalen Eigenschaften dieser Funktionen eine bessere Approximation der Differentialoperatoren zulassen, als dies z.B. bei Finite-Differenzen-Verfahren der Fall ist. Spektrale Verfahren sind wiederholt für quasi-geostrophische Modelle verwendet worden - allerdings ausschließlich für doppelt-periodische oder quadratische Gebiete und zudem nur für Gleichungen mit konstanten Koeffizienten. Typische Realisierungen dieser Art beschreiben HAIDVOGEL (1977) und ROGERS (1985). Im vorliegenden Fall lassen sich diese vereinfachenden Voraussetzungen nicht machen, so daß hier ein anderer Weg beschritten wird, der im Folgenden kurz skizziert werden soll:

Die horizontalen Randbedingungen erfordern eine spektrale Darstellung der Lösung mittels Tschebyscheff-Polynomen im Raum. Dies führt zu sehr hohen Auflösungen in der Nähe der Ränder, woraus aus Gründen der numerischen Stabilität sehr kurze Zeitschritte von wenigen Stunden für explizite Zeitschrittverfahren resultieren (ROGERS, 1985). Abgesehen von den Schwierigkeiten, die die Ableitung einer expliziten Form für die spektralen Entwicklungskoeffizienten beinhaltet, legen die zu lösenden Gleichungen ein implizites Zeitschrittverfahren nahe. Dadurch werden sehr große

Zeitschritte möglich, deren Länge nur von der zu beschreibenden Jahresperiode und den Anforderungen an die Genauigkeit begrenzt wird. Ein solches Verfahren mit Schritten von drei Monaten wird in Abschnitt II.2 beschrieben.

Aus diesem Verfahren resultiert zu jedem Zeitschritt ein gekoppeltes elliptisches System, das mittels spektraler Defektkorrektur (ORSZAG, 1979) gelöst wird. Diese Methode und einige ihrer Eigenschaften sowie die spektrale Darstellung der Lösung werden in Abschnitt II.3 im Hinblick auf einen für das physikalische Modell zutreffenden Parameterbereich diskutiert. Die spektrale Defektkorrektur erfordert wiederum die mehrfache Invertierung eines geeigneten Finite-Differenzen-Operators des gleichen elliptischen Problems. Da diese innerste Komponente am häufigsten verwendet wird, hängt die Effizienz des Gesamt-Verfahrens wesentlich von der Schnelligkeit des hierfür gewählten Algorithmus ab. Dafür wird in Abschnitt II.4 ein Mehrgitterverfahren, das sich als robust gegenüber Parametervariationen und als schnell erweist, vorgestellt.

Schließlich wird in Abschnitt II.5 die Struktur des gesamten numerischen Modells zusammenfassend dargestellt und der Ablauf einer vollständigen Rechnung erläutert.

## II.2 Die zeitliche Diskretisierung

Das Gleichungssystem 1.14, 1.15 läßt sich etwas schematischer beschreiben als

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{00} P_0 + L_{10} P_0 + W P_1 = F_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{11} P_1 + L_{01} P_1 + W P_0 = F_1$$

2.1

wobei die  $L_{j,k}, j,k=0,1$  elliptische Operatoren zweiter Ordnung sind und  $W$  ein Operator erster Ordnung ist, der die Wechselwirkung der beiden Lösungskomponenten  $P_0$  und  $P_1$  über der Topographie beschreibt.

$F_0$  und  $F_1$  sind periodische Funktionen der Zeit, d.h. es ist

$$(F_0, F_1) = (\tilde{F}_0, \tilde{F}_1) \cdot e^{i\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi / \text{Jahr}$$

Da das System 2.1 linear ist, werden auch die Lösungen für  $p_0$  und  $p_1$  nach einer Einschwingphase periodisch mit  $\omega_0$  sein. Da es in der vorliegenden Arbeit lediglich auf diese periodischen Lösungen ankommt, erscheint es wünschenswert, diese Eigenschaften der Lösung bei der zeitlichen Diskretisierung des Systems 2.1 zu berücksichtigen. Weiterhin sollte die periodische Lösung mit einer minimalen Anzahl von Zeitschritten erreicht werden. Sei dann  $2\pi/\omega_0 = N\Delta t$ . Eine implizite Diskretisierung zentral um den Zeitpunkt  $n\Delta t$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} TL_{00} p_0^{(n+\frac{1}{2})} - TL_{00} p_0^{(n-\frac{1}{2})} + L_{10} p_0^{(n+\frac{1}{2})} + L_{10} p_0^{(n-\frac{1}{2})} + \omega p_1^{(n+\frac{1}{2})} + \omega p_1^{(n-\frac{1}{2})} \\ = F_0^{(n+\frac{1}{2})} + F_0^{(n-\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TL_{11} p_1^{(n+\frac{1}{2})} - TL_{11} p_1^{(n-\frac{1}{2})} + L_{01} p_1^{(n+\frac{1}{2})} + L_{01} p_1^{(n-\frac{1}{2})} + \omega p_0^{(n+\frac{1}{2})} + \omega p_0^{(n-\frac{1}{2})} \\ = F_1^{(n+\frac{1}{2})} + F_1^{(n-\frac{1}{2})} \end{aligned}$$

2.2

Für  $T = \frac{2}{\Delta t}$  ist dies eine normale Diskretisierung mit zentralen Differenzen in der Zeit, die konsistent von der Ordnung  $(\Delta t)^2$  ist.

Für die angestrebten sehr großen Zeitschritte ist dies sicherlich ein sehr großer Diskretisierungsfehler. Für

$$T = \frac{2}{\Delta t} \left( \frac{\omega_0 \Delta t}{2} \right) \cot \left( \frac{\omega_0 \Delta t}{2} \right)$$

2.3

läßt sich dieser Fehler jedoch vermeiden.

Für zeitlich periodische Funktionen  $P_0, P_1, F_0, F_1$  ist die Diskretisierung 2.2 mit 2.3 exakt. Dafür geht z.B. die erste Gleichung von 2.2 über in

$$2i \sin\left(\frac{\omega_0 \Delta t}{2}\right) T \cdot L_{00} P_0^{(n)} + 2 \cos\left(\frac{\omega_0 \Delta t}{2}\right) \cdot (L_{10} P_0^{(n)} + W P_1^{(n)}) \\ = 2 \cos\left(\frac{\omega_0 \Delta t}{2}\right) F_0^{(n)}$$

oder mit 2.3

$$i\omega_0 L_{00} P_0^{(n)} + L_{10} P_0^{(n)} + W P_1^{(n)} = F_0^{(n)}$$

Weiterhin besitzt die Funktion  $x \cdot \cot(x)$  im Intervall  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$  eine gleichmäßig konvergente Potenzreihenentwicklung in  $x$  (ABRAMOWITZ und STEGUN, 1964), d.h. es ist

$$T = \frac{2}{\Delta t} \left( 1 + a_2 \Delta t^2 + a_4 \Delta t^4 + \dots \right)$$

so daß die Diskretisierung 2.2 mit  $T$  gemäß 2.3 ebenfalls konsistent ist von der Ordnung  $(\Delta t)^2$ , solange gilt

$$0 \leq \frac{\omega_0 \Delta t}{2} = \frac{\pi}{N} \leq \frac{\pi}{4}, \text{ d.h. } N \geq 4.$$

Der maximale Zeitschritt für die Jahresperiode beträgt also drei Monate. Dies ist auch der Zeitschritt mit dem die späteren Rechnungen ausgeführt werden. Es sei noch bemerkt, daß diese Art der zeitlichen Diskretisierung den von GOTTLIEB und TURKEL (1980) für explizite Zeitschrittverfahren mit spektralen Approximationen im Raum vorgeschlagenen sehr ähnlich ist, obwohl sie hier aus einer anderen Motivation heraus erfolgt.



Einer besonderen Behandlung bedarf die Randbedingung 1.16 für  $\vec{p}_1$ . Das zum Zeitpunkt  $(t+\frac{\Delta}{2})\Delta t$  zu lösende Problem lautet:

$$\begin{aligned} L_0 \vec{p}_0^{(t+\frac{\Delta}{2})} + \mathcal{W} \vec{p}_1^{(t+\frac{\Delta}{2})} &= G_0(\vec{F}_0, \vec{p}_0^{(t-\frac{\Delta}{2})}, \vec{p}_1^{(t-\frac{\Delta}{2})}) \\ L_1 \vec{p}_1^{(t+\frac{\Delta}{2})} + \mathcal{W} \vec{p}_0^{(t+\frac{\Delta}{2})} &= G_1(\vec{F}_1, \vec{p}_0^{(t-\frac{\Delta}{2})}, \vec{p}_1^{(t-\frac{\Delta}{2})}) \end{aligned} \quad 2.4$$

mit  $L_0 = TL_{00} + L_{10}$ ,  $L_1 = TL_{11} + L_{01}$  gemäß 2.2.

Die Lösung zum Zeitpunkt  $(t-\frac{\Delta}{2})\Delta t$  erfülle die Randbedingung 1.16. Dann läßt sich die neue Lösung aufspalten in

$$\begin{aligned} \vec{p}_0^{(t+\frac{\Delta}{2})} &= \tilde{\vec{p}}_0^{(t+\frac{\Delta}{2})} + c^{(t+\frac{\Delta}{2})} \hat{\vec{p}}_0 \\ \vec{p}_1^{(t+\frac{\Delta}{2})} &= \tilde{\vec{p}}_1^{(t+\frac{\Delta}{2})} + c^{(t+\frac{\Delta}{2})} \hat{\vec{p}}_1 \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{\vec{p}}_0, \tilde{\vec{p}}_1$  dem System 2.4 mit homogenen Randbedingungen genügt und  $\hat{\vec{p}}_0, \hat{\vec{p}}_1$  dem homogenen System 2.4, d.h. mit  $G_0 = G_1 = 0$ , mit der Randbedingung

$$\hat{\vec{p}}_0 = 0, \hat{\vec{p}}_1 = 1 \quad \text{auf dem Rand.}$$

Die Randbedingung 1.16 ergibt dann

$$c^{(t+\frac{\Delta}{2})} = - \frac{\iint_{\Delta} \tilde{\vec{p}}_1 d\Delta}{\iint_{\Delta} \hat{\vec{p}}_1 d\Delta} \quad 2.5$$

wobei  $\hat{\vec{p}}_0$  und  $\hat{\vec{p}}_1$  nur einmal zu Beginn der Rechnung bestimmt werden müssen. Damit ist die zeitliche Diskretisierung des Systems 1.14, 1.15 mit der

Randbedingungen 1.16 vollständig beschrieben. Die spektrale Auswertung der Integrale in 2.5 wird in Appendix A beschrieben.

### II.3 Die spektrale Lösung der elliptischen Operatoren

Das in dieser Arbeit gewählte spektrale Verfahren zur Lösung des elliptischen Systems 2.4 soll zunächst am eindimensionalen Stommel-Problem 1.18 erläutert werden.

Wegen der Randbedingung in 1.18 liegt es zunächst nahe, eine Näherungslösung in der Form

$$\hat{p}(x) = \sum_{n=1}^N \tilde{p}_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad 2.6$$

zu suchen. Wegen der Vollständigkeit der sinus-Funktionen für  $0 \leq x \leq L$  besitzt die Lösung  $p(x)$  von 1.18 eine gleichmäßig konvergente Reihenentwicklung in diesen Funktionen. Das ist aber für die erste Ableitung von  $p$  nicht der Fall, so daß sich mit diesem Funktionensystem keine konsistente Approximation der Gleichung 1.18 erreichen läßt. Wie BÖNING (1985) gezeigt hat, ergeben sich daraus spektrale Lösungen, deren Fehler lediglich mit  $N^{-2}$  abnehmen. Dieses Verhalten ist nicht besser als das eines FD-Verfahrens (Finite-Differenzen-Verfahren) zweiter Ordnung und rechtfertigt somit nicht den erheblichen Mehraufwand einer spektralen Lösung.

Die obigen Schwierigkeiten werden mit den Tschebyscheff-Polynomen  $T_n(\tau)$ ,  $-1 \leq \tau \leq 1$ , vermieden, da ihr Konvergenzverhalten lediglich von der Differenzierbarkeit der zu entwickelnden Funktion im Inneren des Intervalls, nicht aber von deren Randwerten abhängt. Sie erlauben also Entwicklungen von  $p$  und sämtlicher Ableitungen, solange  $p$  hinreichend oft differenzierbar ist. Alle im folgenden benötigten funktionalen Eigenschaften dieser Polynome sind bei GOTTLIB und ORSZAG (1977) und

ABRAMOWITZ und STEGUN (1964) zusammengetragen.

Durch  $\tau = \frac{2x}{L} - 1$  geht 1.18 nach einigen Umformungen über in

$$\frac{d^2 \rho}{d\tau^2} + b(\tau) \cdot \frac{d\rho}{d\tau} - a \cdot \rho = G(\tau) \quad , \quad \rho(-1) = \rho(1) = 0 \quad 2.7$$

mit  $a = \left( \frac{\pi L}{2\beta} \right)^2 \quad , \quad b(\tau) = \frac{\beta L}{2R} + \frac{f_0 L}{2RH_0} g(\tau)$

Es wird dann eine Näherungslösung zu 2.7 in der Form

$$\hat{\rho}(\tau) = \sum_{h=0}^N \tilde{\rho}_h T_h(\tau) \quad , \quad \hat{\rho}(-1) = \hat{\rho}(1) = 0 \quad 2.8$$

gesucht. Wegen  $T_h(\cos(x)) = \cos(hx)$  für  $0 \leq x \leq \pi$  erhält man auf dem "Collokationsgitter"  $\tau_i$

$$\hat{\rho}_i = \hat{\rho}(\tau_i) = \sum_{h=0}^N \tilde{\rho}_h \cos\left(\frac{\pi}{N} h i\right) \quad , \quad \tau_i = \cos\left(\frac{\pi}{N} i\right) \quad , \quad i = 0, \dots, N.$$

Es besteht hier also ein direkter Zusammenhang mit den Fourier-cosinus-Reihen.

Mit der diskreten Orthogonalität der cosinus-Funktionen

$$\sum_{i=0}^N \frac{1}{\bar{c}_i} \cos\left(\frac{\pi}{N} h i\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{N} m i\right) = \frac{N}{2} \bar{c}_h \delta_{h,m} \quad , \quad \bar{c}_i = \begin{cases} 2 & \text{für } i = 0, N \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

erhält man die zu 2.8 inverse Beziehung

$$\tilde{\rho}_h = \frac{2}{N \bar{c}_h} \sum_{i=0}^N \frac{1}{\bar{c}_i} \hat{\rho}_i \cos\left(\frac{\pi}{N} h i\right) \quad , \quad h = 0, \dots, N \quad 2.9$$

Hat weiterhin  $\hat{p}(\tau)$  die Darstellung 2.8, so ergeben sich analoge Darstellungen für die Ableitungen von  $\hat{p}(\tau)$  gemäß

$$\hat{p}'(\tau) = \sum_{h=0}^N \tilde{p}_h' \cdot T_h(\tau) \quad , \quad \tilde{p}_h' = \frac{2}{c_h} \sum_{\substack{j=h+1 \\ j+h=1 \bmod 2}}^N j \tilde{p}_j$$

2.10

$$\hat{p}''(\tau) = \sum_{h=0}^N \tilde{p}_h'' \cdot T_h(\tau) \quad , \quad \tilde{p}_h'' = \frac{1}{c_h} \sum_{\substack{j=h+2 \\ j+h=0 \bmod 2}}^N j(j^2-h^2) \tilde{p}_j$$

$c_h = 2$  für  $h \leq 0$ , sonst 1.

Mit den Beziehungen 2.8 - 2.10 läßt sich die spektrale Auswertung der Ableitungen einer auf dem Collokationsgitter vorliegenden Funktion  $\hat{p}$  in drei Schritten erreichen:

- 1.)  $\hat{p}_i \rightarrow \tilde{p}_h$  mit 2.9 (Hintransformation)
- 2.)  $\tilde{p}_h \rightarrow \tilde{p}_h', \tilde{p}_h''$  mit 2.10 (spektrale Ableitung)
- 3.)  $\tilde{p}_h', \tilde{p}_h'' \rightarrow \hat{p}_i', \hat{p}_i''$  mit 2.8 (Rücktransformation)

Formal läßt sich dies ausdrücken in zwei Matrix-Multiplikationen

$$\hat{p}_m' = \sum_{i=1}^{N-1} D_{m,i}' \cdot \hat{p}_i \quad , \quad \hat{p}_m'' = \sum_{i=1}^{N-1} D_{m,i}'' \cdot \hat{p}_i$$

mit der expliziten Darstellung der Ableitungsmatrizen

$$D_{m,i}' = \frac{4}{N} \sum_{h=0}^N \frac{1}{c_h} \sum_{\substack{j=h+1 \\ j+h=1 \bmod 2}}^N \frac{j}{c_j} \cos\left(\frac{\pi}{N} m \cdot h\right) \cos\left(\frac{\pi}{N} j \cdot i\right)$$

$$D_{m,i}'' = \frac{2}{N} \sum_{h=0}^N \frac{1}{c_h} \sum_{\substack{j=h+2 \\ j+h=0 \bmod 2}}^N \frac{j(j^2-h^2)}{c_j} \cos\left(\frac{\pi}{N} m \cdot h\right) \cos\left(\frac{\pi}{N} j \cdot i\right)$$

2.11

$i, m = 1, \dots, N-1$ .

Dabei wurde die Randbedingung  $\vec{p}_0 = \vec{p}_N = 0$  berücksichtigt. Liegen nun  $b_m = b(\tau_m)$  und  $G_m = G(\tau_m)$  aus 2.7 auf dem Collokationsgitter vor, so erhält man eine mögliche spektrale Approximation der Gleichung 2.7 in naheliegender Weise durch

$$\sum_{i=1}^{N-1} (L_{sp})_{m,i} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N-1} (D''_{m,i} + b_m \cdot D'_{m,i} - S_{m,i} \cdot a) \vec{p}_i = G_m \quad 2.12$$

$$m = 1, \dots, N-1 \quad \text{und} \quad \vec{p}_0 = \vec{p}_N = 0.$$

Dies ist die pseudo-spektrale Form der Gleichung 2.7 (ORSZAG, 1970). Hiermit läßt sich im Gegensatz zu anderen spektralen Methoden der variable Koeffizient  $b(\tau)$  ohne zusätzlichen Aufwand behandeln. Allerdings liefert 2.12 keine exakte spektrale Lösung, da das Produkt mit  $b(\tau)$  in der Regel mehr als  $N$  Entwicklungsfunktionen enthält, die sich hier als Aliasing-Fehler in der ersten  $N$  Komponenten niederschlagen. HAIDVOGEL (1977) zeigt aber, daß Aliasing-Fehler sogar bei nichtlinearen Termen sehr klein sind, so daß sie hier nicht weiter beachtet werden sollen. Für konstantes  $b(\tau)$  ist 2.12 identisch mit der Collokations-Methode (siehe z.B. GOTTLIEB und ORSZAG, 1977).

Die direkte Invertierung des Gleichungssystems 2.12 bereitet zumindest im zweidimensionalen Fall erhebliche Schwierigkeiten, da es sich bei  $L_{sp}$  um eine vollbesetzte Matrix mit sehr schlechter Kondition handelt. Daher ist es notwendig, zum einen die direkte Berechnung (und Speicherung) der Matrix  $L_{sp}$  zu vermeiden und zum anderen die Kondition zu verbessern. Beides leistet ein iteratives Verfahren mit Defekt-Korrektur, dessen prinzipielle Form lautet:

$$L_{sp} \vec{p}^{(n+1)} = L_{sp} \vec{p}^{(n)} + \alpha \cdot (G - L_{sp} \vec{p}^{(n)}), \quad L_{sp} \vec{p}^{(0)} = G \quad 2.13$$

Dabei ist  $\alpha$  ein möglichst optimal zu wählender Relaxationskoeffizient und  $L_{ap}$  eine FD-Approximation der Gleichung 2.7 (ORSZAG, 1979). Durch diese Iteration wird die Lösung des spektralen Problems mit hoher Genauigkeit (Konsistenzordnung N), aber schlechter Kondition ( $\sim N^2$ ) durch mehrfache Lösung des FD-Problems mit geringer Genauigkeit (Konsistenzordnung 1 oder 2) angenähert, wobei der Defekt der Näherungslösung  $R^{(n)} = G - L_{sp} \hat{p}^{(n)}$  bezüglich des spektralen Operators wiederum zur Korrektur verwendet wird. Die Konvergenzrate dieser Iteration hängt dabei wesentlich von der Wahl von  $L_{ap}$  und  $\alpha$ , d.h. von den Eigenwerten der Iterationsmatrix

$$\mathcal{J} = (I - \alpha L_{ap}^{-1} \cdot L_{sp})$$

ab. Nur für sehr einfache Operatoren lassen sich darüber a priori genaue Aussagen machen. Weiterhin haben HALDENWANG et al. (1984) gezeigt, daß sich die Konvergenzraten im Allgemeinen wesentlich verbessern lassen indem  $\alpha$  vom Fortgang der Iteration abhängig gemacht wird.

Eine parameterfreie Variante von 2.13, die diese Aspekte berücksichtigt und die für die folgenden Rechnungen verwendet wird, lautet (MALIK et al., 1985):

$$L_{ap} \hat{p}^{(0)} = G, \quad R^{(0)} = G - L_{sp} \hat{p}^{(0)}, \quad L_{ap} \Delta^{(0)} = R^{(0)}$$

$$\alpha^{(n)} = \frac{(L_{sp} \Delta^{(n)}, R^{(n)})}{(L_{sp} \Delta^{(n)}, L_{sp} \Delta^{(n)})}$$

$$\hat{p}^{(n+1)} = \hat{p}^{(n)} + \alpha^{(n)} \Delta^{(n)}$$

$$R^{(n+1)} = R^{(n)} - \alpha^{(n)} L_{sp} \Delta^{(n)}$$

$$L_{ap} \Delta^{(n+1)} = R^{(n+1)}$$

2.14

wobei  $(\cdot, \cdot)$  das diskrete  $L_2$ -Skalarprodukt ist.

Diese Iteration ist bis auf den instationären Relaxationskoeffizienten  $\alpha^{(n)}$  identisch mit 2.13 und konvergiert, solange der hermitesche Teil von  $L_{sp}^{-1} \cdot L_{sp}$  positiv definit ist. Das ist für die folgenden Beispiele der Fall.

Da der Operator  $L_{sp}$  lediglich zur Berechnung der spektralen Residuen benötigt wird, entfällt auch die vollständige Berechnung der entsprechenden Matrix. Die Auswertung von  $L_{sp}$  erfolgt in den drei Schritten 2.9, 2.10 und 2.8, wobei für die Transformationen 2.9 und 2.8 ein für cosinus-Summen modifizierter FFT-Algorithmus verwendet wird (DEVILLE und LABROSSE, 1982).

Die Konstruktion des FD-Operators  $L_{sp}$  erfolgt nicht direkt auf dem Collokationsgitter, sondern nach der Koordinatentransformation

$$\tau = \cos(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

auf dem äquidistanten Gitter  $x_i = \frac{\pi}{N} i$ ,  $i=0, \dots, N$ , da so mittels zentraler Differenzen eine Approximation der Gleichung 2.7 von der Konsistenzordnung 2 erreicht wird.

Die transformierte Gleichung 2.7 und deren Diskretisierung lauten:

$$\frac{1}{\sin^2 x} \frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{1}{\sin x} \left( \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + b(x) \right) \frac{dp}{dx} - \alpha p = G(x), \quad p(0) = p(\pi) = 0 \quad 2.15$$

$$\left( \frac{1}{h_i^2} + \frac{1}{2h_i} \left( \frac{\cos x_i}{\sin^2 x_i} + b_i \right) \right) \hat{p}_{i-1} - \left( \frac{2}{h_i^2} + \alpha \right) \hat{p}_i + \left( \frac{1}{h_i^2} - \frac{1}{2h_i} \left( \frac{\cos x_i}{\sin^2 x_i} + b_i \right) \right) \hat{p}_{i+1} = G_i, \quad \hat{p}_0 = \hat{p}_N = 0 \quad 2.16$$

$$x_i = \frac{\pi}{N} i, \quad h_i = \frac{\pi}{N} \sin x_i, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Es sind noch andere, etwas weniger aufwendige Formen für  $L_{qp}$  möglich (siehe HALDENWANG et al., 1984, ZANG et al., 1982). Hier wurde die Form 2.16 gewählt, da so als Nebenprodukt der spektralen Iteration eine vollständige FD-Lösung des gleichen physikalischen Problems erhalten wird. Die Invertierung der tridiagonalen Matrix  $L_{qp}$  nach 2.16 ist problemlos. Im zweidimensionalen Fall wird für diesen Schritt ein Mehrgitterverfahren entwickelt (siehe II.4).

Das Verhalten der Iteration 2.14 wird nun an einigen extremen Beispielen demonstriert und die Ergebnisse der FD-Anfangsnäherung 2.16 gegenübergestellt. Typische Parameterwerte für Gleichung 2.7 sind:

$$L = 5000 \text{ km}, B = 2500 \text{ km}, H_0 = 4 \text{ km}, \Omega = 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$$

$$f_0 = 6.2 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}, \beta_0 = 2 \cdot 10^{-13} \text{ sec}^{-1} \text{ cm}^{-1} \text{ (für } 25^\circ \text{N)}$$

woraus sich die Koeffizienten der Gleichung ergeben zu

$$b(r) = 50 + 4 \cdot 10^4 \cdot g(r), \quad a = \pi^2$$

Dabei wird für  $g(r)$  eine "Bodenneigung" in der Größenordnung  $10^{-3}$  angenommen. Für zwei verschiedene  $g(r)$  werden jeweils zwei Fälle betrachtet:

- 1.)  $G(r) = \text{const}$  Dies entspricht dem klassischen Stommel-Problem mit einem konstanten Windstress.
- 2.) Hier wird eine analytische Lösung  $\beta = \sin(15 \cdot \pi \cdot r)$  vorgegeben und daraus mittels 2.7  $G(r)$  bestimmt. Dann wird mit dieser rechten Seite die numerische Lösung berechnet.

In allen Fällen wird mit  $N = 64$  gerechnet. Daraus ergibt sich für das Collokationsgitter eine maximale Gitterdistanz von 122,7 km in der Mitte des Intervalls. Die Wellenlänge in  $\beta$  beträgt 333 km.



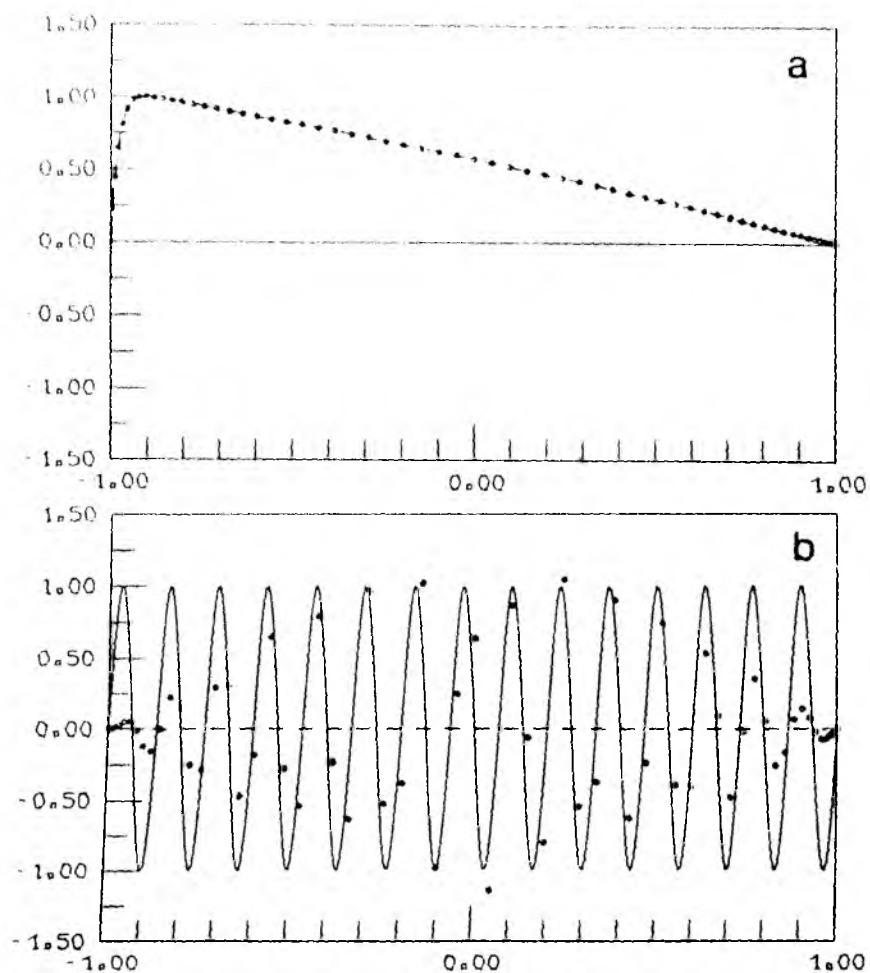


Abb. II.1 a) Stommellösung,  $\gamma(\tau) = 0$   
 ..... FD, --- spektral  
 b) Hochvariable Lösung  $\hat{p}$  ———  
 punktwiser Fehler .... FD, --- spektral

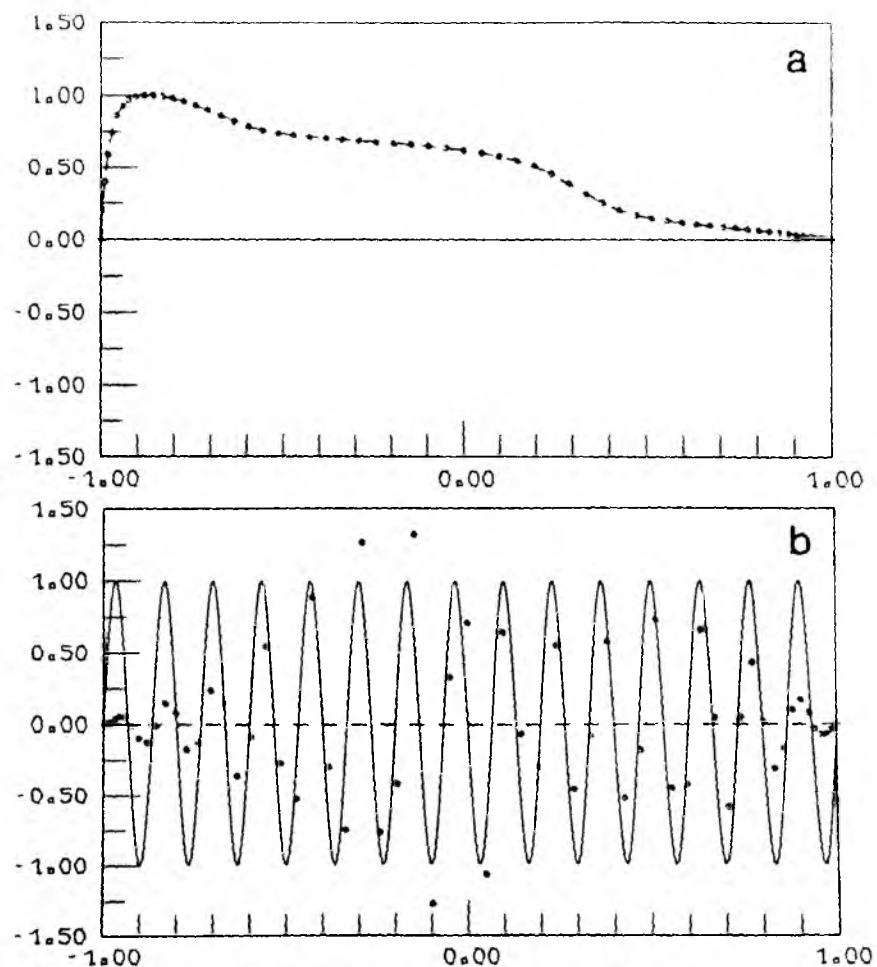


Abb. II.2 a) Stommellösung,  $\gamma(\tau) = -10^{-3} \cdot \sin(2\pi\tau)$   
 .... FD, --- spektral  
 b) Hochvariable Lösung  $\hat{p}$  ———  
 punktwiser Fehler .... FD, --- spektral

Abbildung II.1 zeigt die Ergebnisse für  $g(r)=0$ , II.2 die für  $g(r)=-10^{-3} \cdot \sin(2\pi r)$ . In beiden Fällen unterscheiden sich die FD- und die spektrale Stommel-Lösung nicht wesentlich, d.h. die spektrale Iteration gibt kaum einen Gewinn. Dies ist nicht verwunderlich, da die Lösung im Inneren des Intervalls sehr glatt ist und die westliche Reibungsgrenzschicht eine extrem hohe Auflösung besitzt (minimale Gitterdistanz 3 km). Das andere Extrem zeigt die hochvariable Lösung. Hier liegt der punktweise maximale Fehler der FD-Lösung im ersten Fall bei 100% im zweiten Fall sogar bei 150%. Trotzdem läßt sich diese Näherung mit wenigen Iterationen spektral verbessern, so daß der Fehler auf 0,01% reduziert wird, obwohl die Wellenlänge der Lösung nicht viel größer als 2 maximale Gitterdistanzen ist. Diese Situation entspricht aber in etwa der zu erwartenden Lösung des zeitabhängigen Problems aus Kapitel I:

Einer relativ großskaligen und damit glatten barotropen Komponente mit Grenzschichtcharakter, dem das am Rand hochauflösende Gitter Rechnung trägt, steht eine hochvariable barokline Lösung gegenüber, die durch die spektrale Iteration wesentlich verbessert werden kann.

Schließlich sollen noch die beiden spektralen Iterationsformen 2.13 und 2.14 hinsichtlich ihrer Konvergenzraten verglichen werden. Zu diesem Zweck wurden für den Fall  $g(r) = -2 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi r)$  die Eigenwerte der Matrix  $L_{sp}^{-1} \cdot L_{sp}$  mittels EISPAC (SMITH et al., 1976 und GARBOW et al., 1977) berechnet und daraus der für 2.13 nach ORSZAG (1979) optimale Relaxationsfaktor  $\alpha_{opt} = 0.46$  bestimmt. Die dafür theoretisch mögliche Konvergenzrate beträgt 0,54 für 2.13. Damit wurden jeweils 20 Iterationen mit 2.13 und 2.14 für die hochvariable Lösung ausgeführt. Die Ergebnisse, sowie die Eigenwerte zeigen Abb.II.3a,b.

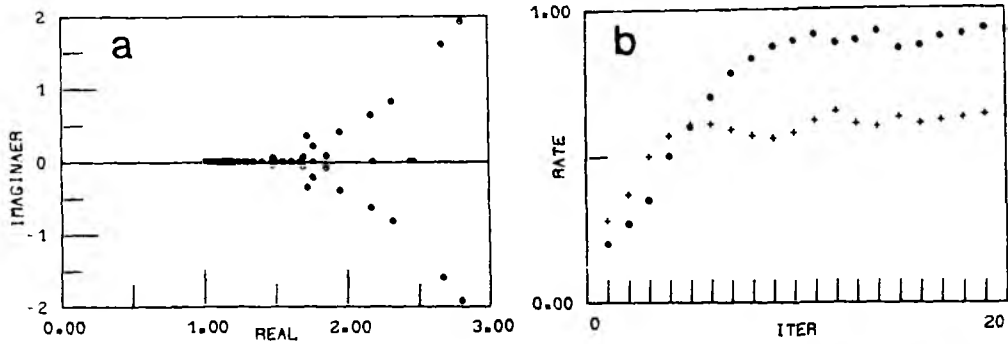


Abb. 11.3 a) Eigenwerte von  $L_{4p}^{-1} L_{sp}$  für  $q(\tau) = -2.0 \cdot 10^{-3} \sin(2\pi\tau)$   
 b) Konvergenzraten der Iteration 2.13 (.....) und 2.14 (+ + +)

Abb. 11.3a zeigt deutlich das wesentlich bessere asymptotische Verhalten von 2.14, obwohl das in der Anfangsphase nicht so ist. Dies liegt an den relativ großen Imaginärteilen der Eigenwerte, die wiederum von dem im Vergleich zum Hauptteil der Differentialgleichung sehr großen  $\beta$ -Term herrühren und die dem Verfahren 2.13 eine oszillatorische Komponente geben. Dies wird mit 2.14 weitgehend vermieden, so daß sich der geringe Mehraufwand für die Berechnung des variablen Relaxationsfaktors lohnt, zumal keine exakte Kenntnis der Eigenwerte der Relaxationsmatrix von vornherein notwendig ist. Damit sind diese vorläufigen Betrachtungen zum eindimensionalen Beispiel abgeschlossen.

Das Prinzip der Lösungen der elliptischen Probleme im zweidimensionalen Fall ist völlig analog zum oben beschriebenen Verfahren. Als Beispiel hierfür wird die stationäre Stommel-Gleichung mit Topographie 1.17 betrachtet, deren Lösung in Form einer endlichen Reihe von Tschebyscheff-Polynomen in zwei Dimensionen gesucht wird.

$$\hat{p}(\tau, s) = \sum_{l=0}^N \sum_{m=0}^M \tilde{p}_{l,m} T_l(\tau) T_m(s), \quad -1 \leq \tau, s \leq 1 \quad 2.17$$

Dafür ist zunächst eine Koordinatentransformation notwendig, die den Modell-Ozean abbildet auf das Standard-Quadrat  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Es soll nun einschränkend angenommen werden, daß der Modell-Ozean im Süden und Norden durch zwei Breitenkreise, im Westen und Osten durch zwei eindeutige Funktionen  $f_1(y)$  und  $f_2(y)$  begrenzt wird (siehe Abb.II.4). Dies ist für den Nordatlantik zwischen  $5^\circ\text{N}$  und  $45^\circ\text{N}$  recht gut erfüllt.

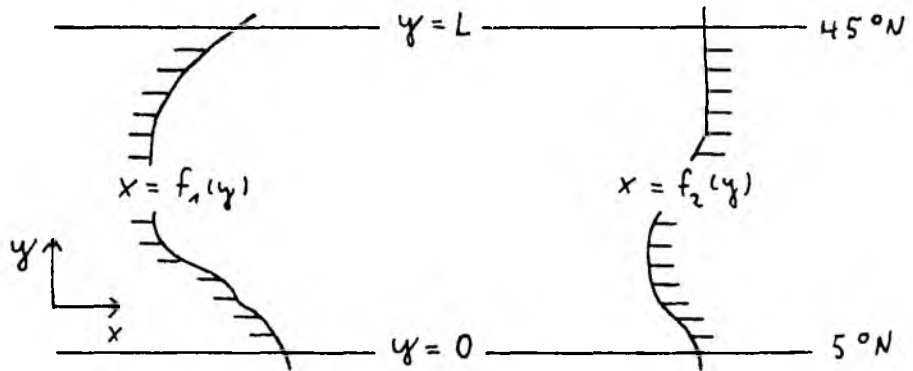


Abb. II.4 Bezeichnungen im zweidimensionalen Modell

Eine einfache Koordinatentransformation mit den gewünschten Eigenschaften ist

$$\tau = 2 \cdot \frac{x - f_1(y)}{B(y)} - 1, \quad s = \frac{2y}{L} - 1, \quad B(y) = f_2(y) - f_1(y) \quad 2.18$$

Diese Transformation hat den Nachteil, daß sie nicht orthogonal ist, jedoch sind andere Koordinatensysteme für beliebige Randfunktionen in der Regel nur numerisch zu generieren (siehe THOMPSON und WARSI, 1982), so daß dieser Nachteil in Kauf genommen wird.

Die mit 2.18 transformierte Gleichung 1.17 lautet

$$\tilde{A}(r,s) \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \tilde{B}(r,s) \frac{\partial^2 \rho}{\partial r \partial s} + \tilde{C}(r,s) \frac{\partial^2 \rho}{\partial s^2} + \tilde{D}(r,s) \frac{\partial \rho}{\partial r} + \tilde{E}(r,s) \frac{\partial \rho}{\partial s} = \tilde{F}(r,s)$$

$$P(r,s) = 0 \quad \text{auf dem Rand}$$

2.19

$$\tilde{A}(r,s) = \left( \frac{L^2}{B^2(s)} + G^2(r,s) \right)$$

$$\tilde{B}(r,s) = -2 \cdot G(r,s)$$

$$\tilde{C}(r,s) = 1$$

$$\tilde{D}(r,s) = \frac{L}{B(s)} \cdot \left( \frac{\beta L}{2R} + \frac{f_0 L}{2H_0 R} \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) + \frac{f_0 L}{2H_0 R} G(r,s) \frac{\partial \beta}{\partial r} + \frac{B'(s)}{B(s)} G(r,s) - \frac{\partial G}{\partial s}$$

$$\tilde{E}(r,s) = - \frac{f_0 L}{2H_0 R} \frac{\partial \beta}{\partial s} \Big|_{r,s}$$

$$\tilde{F}(r,s) = \frac{\epsilon_0 f_0^2 L^2}{4 H_0 R} W_E$$

$$G(r,s) = \left( 2 \cdot \frac{f_1'}{B} + (r+1) \frac{B'}{B} \right)$$

$$f_1' = \frac{df_1}{ds}, \quad B' = \frac{dB}{ds}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial r} \Big|_{r,s} = \frac{2}{B} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial r}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s} \Big|_{r,s} = \frac{2}{L} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial s} - G \cdot \frac{\partial \beta}{\partial r}$$

Dieses setzt voraus, daß die beiden Randfunktionen mindestens zweimal stetig differenzierbar sind, wodurch die Variabilität der Berandung weiter eingeschränkt wird. Allerdings erscheint es wenig sinnvoll, eine spektrale Lösung von 1.17 zu suchen, falls nicht einmal die Ränder gleichmäßig konvergente spektrale Darstellungen besitzen.

Die explizite Bestimmung der Koeffizientenfunktionen mittels spektraler Differentiation wird in II.5 erläutert. Liegen diese vor, so kann  $L_{sp}$  auf dem Collokationsgitter

$$x_i = \cos\left(\frac{\pi}{N} i\right), \quad i = 0, \dots, N, \quad s_j = \cos\left(\frac{\pi}{M} j\right), \quad j = 0, \dots, M \quad 2.20$$

konstruiert werden.

Die Auswertung der Ableitungen erfolgt wie im eindimensionalen Beispiel durch Transformation in den Spektralraum, Bildung der spektralen Ableitung und Rücktransformation in den physikalischen Raum, so daß auch hier die explizite Berechnung von  $L_{sp}$  entfällt.

Auch die Konstruktion des FD-Operators  $L_{qp}$  geschieht analog zum eindimensionalen Fall nach einer weiteren Transformation von 2.19 durch

$$x = \cos \alpha, \quad s = \cos \gamma, \quad 0 \leq \alpha, \gamma \leq \pi$$

auf dem äquidistanten Gitter

$$x_i = \frac{\pi}{N} i, \quad i = 0, \dots, N, \quad \gamma_j = \frac{\pi}{M} j, \quad j = 0, \dots, M$$

Dabei ergibt sich wegen der gemischten Ableitung minimal ein sieben-Punkte-Operator, maximal ein neun-Punkte-Operator für eine Diskretisierung mit Konsistenzordnung 2.

Um die diagonale Dominanz von  $L_{qp}$  zu erhöhen, werden zwei verschiedene sieben-Punkte-Formen für die gemischte Ableitung abhängig vom Vorzeichen von  $\tilde{\beta}$  verwendet. Aus dem gleichen Grund werden die ersten Ableitungen als gewichtetes Mittel aus zentralen und "upstream"-Differenzen diskretisiert. Diese Approximationen sind natürlich nicht mehr von zweiter Ordnung. Allerdings erweist sich diese Maßnahme auch nur bei Berücksichtigung extremer Topographie als notwendig. Die vollständige

Diskretisierung von 2.19 findet sich in Appendix B.

Damit lassen sich die zweidimensionalen elliptischen Probleme im Prinzip lösen. Voraussetzung dafür ist allerdings ein möglichst effizienter Algorithmus zur Invertierung von  $L_{qp}$ . Ein solches Verfahren wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

#### II.4 Das Mehrgitterverfahren

Für die spektrale Lösung der elliptischen Gleichungen wird ein Verfahren benötigt, das den approximierenden FD-Operator  $L_{qp}$  der allgemeinen Form

$$\begin{aligned}
 & A_{MM} \hat{p}_{i,j-1} + A_{BM} \hat{p}_{i,j} + A_{PM} \hat{p}_{i+1,j-1} \\
 & + A_{MB} \hat{p}_{i-1,j} + A_{BB} \hat{p}_{i,j} + A_{PB} \hat{p}_{i+1,j} \\
 & + A_{MP} \hat{p}_{i-1,j+1} + A_{BP} \hat{p}_{i,j+1} + A_{PP} \hat{p}_{i+1,j+1} = F_{i,j}
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, M-1$$

$$\hat{p}_{0,j} = \hat{p}_{N,j} = \hat{p}_{i,0} = \hat{p}_{i,M} = 0, \quad i=0, \dots, N, \quad j=0, \dots, M$$

möglichst effektiv invertieren kann. Außerdem sollte dieses Verfahren Parametervariationen, z.B. im Rossby-Radius, im Beta-Term und in der Topographie in einem gewissen Bereich zulassen. Schließlich sollte die Effizienz nicht zu stark von der räumlichen Auflösung im Collokationsgitter abhängen.

Diese Ziele sind im Prinzip mit einem Mehrgitterverfahren zu erreichen. Es handelt sich dabei allerdings mehr um eine allgemeine Strategie zur iterativen Lösung von 2.21 als um eine konkrete Vorschrift, so daß ein solches Verfahren die sorgfältige Abstimmung verschiedener Komponenten

aufeinander erfordert. Die Strategie beruht auf der allgemeinen Tatsache, daß klassische Iterationsverfahren (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR und deren Varianten) in sehr wenigen Schritten die lokalen und kleinskaligen Fehler der Anfangsnäherung beseitigen, wohingegen die globalen Fehlerkomponenten fast unberührt bleiben. Dies gilt umso mehr, je lokaler der Charakter der Iteration ist. Der wesentliche Effekt dieser Verfahren ist also eine Glättung des Fehlers. Die geglätteten Fehler lassen sich dann ebenso gut auf einem größeren Gitter darstellen, wo sie aber mit dem gleichen Iterationsverfahren mit erheblich weniger Aufwand beseitigt werden können. Die so bestimmte Korrektur der Anfangsnäherung wird danach auf das feinere Gitter transportiert wo sie zur Verbesserung der Gesamtlösung dient. Dieses Prinzip läßt sich rekursiv bis auf sehr grobe Gitter fortsetzen auf denen das Problem entweder direkt oder in wenigen Schritten iterativ bis zur geforderten Genauigkeit gelöst werden kann.

Liegt nun das diskrete Problem  $L_{q,p} \hat{p} = F$  (2.21) auf einem gegebenen Gitter (dem Collokationsgitter 2.20) vor, so erfordert das Mehrgitterverfahren die Definition der folgenden Komponenten:

- 1.) eine Hierarchie von Gittern
- 2.) eine Relaxation zur Glättung der Fehlerkomponenten auf jedem Gitter
- 3.) eine Restriktion zum Transport des Fehlers zu größeren Gittern
- 4.) die Definition von  $L_{q,p}$  auf den größeren Gittern
- 5.) eine Prolongation zum Transport der Korrektur zu feineren Gittern
- 6.) Kriterien, wann zu anderen Gittern übergegangen wird.

Einen Überblick über die teilweise sehr verschiedenen Möglichkeiten geben STÜBEN und TROTTEMBERG (1982) und BRANDT (1984).

Da für die Auswertung des spektralen Operators  $L_{s,p}$  schnelle Fourier-Transformationen verwendet werden, werden  $N$  und  $M$  zweckmäßig auf Potenzen von 2 festgelegt:

$$N = 2^h, \quad M = 2^m$$

wobei stets  $N \geq M$  gilt und  $N$  die Anzahl Punkte in Ost-West-Richtung beschreibt. Da das Integrationsgebiet durch die Transformation 2.18 auf das Quadrat  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  abgebildet wurde, läßt sich die



Gitterhierarchie auf naheliegende Weise definieren durch

$$r_i^{(k)} = \cos\left(\frac{\pi}{N_k} i\right), \quad i=0, \dots, N_k, \quad s_j^{(k)} = \cos\left(\frac{\pi}{M_k} j\right), \quad j=0, \dots, M_k$$

2.22

$$N_k = \frac{N}{M} \cdot 2^k, \quad M_k = 2^k, \quad k = 1, \dots, m$$

Hierbei enthält jedes Gitter alle größeren Gitter und alle Gitter haben den gleichen Rand. Im Folgenden werden das jeweilige Gitter und die darauf definierten Funktionen und Operatoren durch den entsprechenden Index  $k$  gekennzeichnet. In der späteren Anwendung werden die Gitter 1 und 2 nicht verwendet.

Die Auswahl der Relaxationen bereitet gewisse Schwierigkeiten. Vergleichende Versuche zeigten, daß klassische Iterationsverfahren (punktweise Gauss-Seidel, zeilenweise Gauss-Seidel) entweder instabil oder in Rechnungen mit variabler Topographie selbst für den Glättungsprozeß sehr ineffizient werden. Die Ursachen dafür sind wiederum die relativ großen planetarischen und topographischen  $\beta$ -Terme. Daher wird hier ein etwas komplexeres, dafür aber robustes Verfahren, das auf einer angenäherten Zerlegung von  $L_{qp}$  in ein Produkt aus einer unteren und oberen Dreiecksmatrix beruht, verwendet. Diese Zerlegungen, die das LDU-Theorem für nichtsinguläre Matrizen (siehe z.B. WESTLAKE, 1968) und die schwach besetzte Bandstruktur von  $L_{qp}$  ausnutzen, sind bekannt unter der Bezeichnung ILU-Zerlegung. Sie wurden erstmals von WESSELING und SONNEVELDT (1980) zur Lösung von Systemen von Differenzengleichungen eingesetzt. Ihre Wirkungsweise im Zusammenhang mit Mehrgitterverfahren beschreibt BRANDT (1984). Hier wird eine zu WESSELING (1982) analoge Form für die neun-Punkte-Operatoren abgeleitet. Verallgemeinerungen davon finden sich bei MEIJERINK und v.d.VORST (1981).

Gesucht wird eine Zerlegung von  $L_{ap_k}$  gemäß

$$(L_{ap_k}) = U_k \cdot L_k + T_k \quad 2.23$$

wobei  $L_{ap_k}$  nach 2.21 eine Bandmatrix mit je vier oberen und unteren Nebendiagonalen ist. Die Matrizen  $U_k$  und  $L_k$  und damit  $T_k$  sind eindeutig festgelegt durch die Forderung, daß  $U_k$  eine untere,  $L_k$  eine obere Dreiecksmatrix sein sollen in denen jeweils nur die gleichen Nebendiagonalen besetzt sind wie in  $L_{ap_k}$  und durch die Normierung der Hauptdiagonalen von  $L_k$  zu 1. Das Produkt  $U_k \cdot L_k$  enthält dann 13 Diagonalen, so daß der Defekt der Zerlegung  $T_k$  lediglich vier Diagonalen enthält. Die rekursive Bestimmung der Matricelemente ist in Appendix C beschrieben.

Mit dieser Zerlegung läßt sich eine sehr effektive Iteration erreichen durch:

$$U_k L_k \hat{p}_k^{(n+1)} = U_k L_k \hat{p}_k^{(n)} + R_k^{(n)} \quad 2.24$$

$$R_k^{(n)} = F_k - L_{ap} \hat{p}_k^{(n)} = T_k (\hat{p}_k^{(n)} - \hat{p}_k^{(n-1)})$$

Dabei lassen sich  $U_k$  und  $L_k$  als Dreiecksmatrizen durch einfache Elimination sehr leicht invertieren. Die Berechnung des Fehlers  $R_k^{(n)}$  ist ebenfalls sehr einfach, da  $T_k$  nur vier besetzte Diagonalen besitzt. Insgesamt ist der Aufwand pro Iterationsschritt nicht viel größer aber in der Regel sehr viel effektiver als bei einer Gauss-Seidel-Iteration. Für Operatoren mit variablen Koeffizienten sind Restriktion, Prolongation und die Definition der Operatoren auf den größeren Gittern nicht unabhängig voneinander zu wählen. Nach BRANDT (1984) werden hier für Restriktion und Prolongation ebenfalls neun-Punkte-Formen gewählt.

$$\hat{p}_{k-1} = R_k^{k-1} \cdot \hat{p}_k$$

Restriktion mit

2.25

$$\begin{aligned} \hat{p}_{k-1, i, j} &= \frac{1}{4} \hat{p}_{k, 2i, 2j} + \frac{1}{8} \left( \hat{p}_{k, 2i+1, j} + \hat{p}_{k, 2i-1, j} + \hat{p}_{k, 2i, 2j+1} + \hat{p}_{k, 2i, 2j-1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{16} \left( \hat{p}_{k, 2i+1, 2j+1} + \hat{p}_{k, 2i-1, 2j+1} + \hat{p}_{k, 2i+1, 2j-1} + \hat{p}_{k, 2i-1, 2j-1} \right) \end{aligned}$$

$$\hat{p}_k = P_{k-1}^k \hat{p}_{k-1}$$

Prolongation mit

2.26

$$\begin{aligned} \hat{p}_{k, 2i, 2j} &= \hat{p}_{k-1, i, j}, \quad \hat{p}_{k, 2i-1, 2j} = \frac{1}{2} \left( \hat{p}_{k-1, i-1, j} + \hat{p}_{k-1, i, j} \right), \quad \hat{p}_{k, 2i, 2j-1} = \frac{1}{2} \left( \hat{p}_{k-1, i, j-1} + \hat{p}_{k-1, i, j} \right) \\ \hat{p}_{k, 2i-1, 2j-1} &= \frac{1}{4} \left( \hat{p}_{k-1, i-1, j-1} + \hat{p}_{k-1, i-1, j} + \hat{p}_{k-1, i, j-1} + \hat{p}_{k-1, i, j} \right) \end{aligned}$$

Die Restriktion 2.25 entspricht einem gewichteten Mittel über alle Punkte des feineren Gitters, die jeweils einen Punkt des groben Gitters umgeben, die Prolongation einer bilinearen Interpolation. Mit ihrer Hilfe läßt sich der Operator  $L_{ap, k}$  auf größeren Gittern definieren:

$$L_{ap, k-1} = R_k^{k-1} \cdot L_{ap, k} \cdot P_{k-1}^k$$

2.27

Wichtig dabei ist, daß der Operator  $L_{ap, k-1}$  mit 2.25 und 2.26 nicht mehr Punkte erhält als  $L_{ap}$ , d.h. es handelt sich ebenfalls um einen neun-Punkte-Operator, dessen ILU-Zerlegung völlig analog zu der von  $L_{ap, k}$  erhalten wird. Die explizite Bestimmung von  $L_{ap, k-1}$  ist im Appendix D

beschrieben. WESSELING (1982) zeigt, daß diese Wahl von  $L_{q_{k-1}}$  auch bei variablen Koeffizienten zu guten Approximationen des Problems auf größeren Gittern führt, die zwar eine Tendenz dazu zeigen, ihre diagonale Dominanz zu verlieren, jedoch wird dieses Verhalten durch die auf größeren Gittern immer exakter werdende ILU-Zerlegung aufgewogen. Damit sind bis auf die Kriterien für die Übergänge zwischen den Gittern alle Komponenten des Mehrgitterverfahrens definiert.

Diese Kriterien bestimmen den eigentlichen Ablauf der Mehrgitteriteration. Das wichtigste Kriterium ist dabei, ob das Problem auf dem feinsten Gitter mit vorgeschriebener Genauigkeit gelöst ist, d.h. falls gilt

$$\| \mathcal{R}_m^{(n)} \| = \| F - L_{q,p} \hat{\rho}_m^{(n)} \| \leq \varepsilon_m$$

wobei  $\varepsilon_m$  eine vorgegebene Toleranz ist. In allen weiteren Details unterscheiden sich die verschiedenen Mehrgitterzyklen. Feste Zyklen schreiben eine von vornherein festgelegte Anzahl Iterationen auf dem jeweils feinsten Gitter vor. In dem vorliegenden Verfahren ist dies nicht der Fall. Neben der Größe des Fehlers wird auch noch die Konvergenzrate

$$\| \mathcal{R}_k^{(n+1)} \| / \| \mathcal{R}_k^{(n)} \|$$

der Relaxation 2.24 bestimmt. Ist sie besser als eine vorgegebene Schranke  $\gamma$ , so wird die Relaxation auf dem gleichen Gitter fortgesetzt. Ist sie schlechter, so bedeutet dies, daß der Fehler  $\mathcal{R}_k^{(n)}$  glatt geworden ist, und die Relaxation wird auf einem größeren Gitter festgesetzt bis dort Konvergenz erreicht wird, wozu gegebenenfalls noch gröbere Gitter verwendet werden. Eine ausführliche Darstellung dieses Verfahrens einschließlich eines Flußdiagramms findet sich bei BRANDT und DINAR (1979). Hier soll lediglich noch auf die Form der Korrektur vom größeren Gitter eingegangen werden.

Liegt auf dem Gitter  $k$  die zu lösende Gleichung

$$L_{ap_k} \hat{p}_k = F_k$$

vor und ist diese durch die Iteration 2.24 bis auf den geglätteten Fehler

$$R_k^{(n)} = F_k - L_{ap_k} \hat{p}_k^{(n)}$$

gelöst worden, so wird beim Übergang zum gröberen Gitter  $k-1$  das dortige Problem definiert durch

$$L_{ap_{k-1}} \hat{p}_{k-1} = F_{k-1}$$

mit

$$\hat{p}_{k-1}^{(0)} = R_k^{k-1} \hat{p}_k^{(n)}$$

als Anfangsnäherung und

$$F_{k-1} = L_{ap_{k-1}} \hat{p}_{k-1}^{(0)} + R_k^{k-1} R_k^{(n)} \quad \text{als rechte Seite}$$

Ist dieses Problem nach  $\ell$  Iterationen 2.24 hinreichend genau gelöst, so erfolgt die Korrektur gemäß

$$\hat{p}_k^{(n)} = \hat{p}_k^{(n)} + P_{k-1}^k \left( \hat{p}_{k-1}^{(\ell)} - \hat{p}_{k-1}^{(0)} \right)$$

Bei dieser Form der Korrektur wird also auf jedem Gitter die volle Lösung  $\hat{p}$  approximiert. Dies ist normalerweise nicht nötig für lineare Gleichungen, jedoch erlaubt sie eine direkte Abschätzung des Approximationsfehlers zwischen der Lösung auf dem feinsten Gitter und der kontinuierlichen Lösung, die als Abbruchkriterium verwendet werden kann (siehe BRANDT, 1984).

Damit ist das hier verwendete Mehrgitterverfahren zur Lösung einer einzelnen elliptischen Gleichung vollständig beschrieben. Die notwendigen

Erweiterungen auf die Systeme der Form 2.4 sind naheliegend und werden in Abschnitt II.5 beschrieben.

Als Beispiel für die Anwendung des Mehrgitter-Verfahrens dient hier das zweidimensionale Stommel-Problem mit Topographie (1.17). Die Parameter entsprechen 25°N, d.h.

$$f_0 = 6.16 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^{-1}, \quad \beta_0 = 2.07 \cdot 10^{-13} \text{ sec}^{-1} \text{ cm}^{-1}$$

Die Bezugstiefe  $H_0$  beträgt 4225 m und ergibt sich als Mittelwert der Topographiedaten im Breitenintervall von 5°N bis 45°N. Als Windfeld liegen die Jahresmittelwerte des Bunker-Datensatzes (ISEMER und HASSE, 1986) im gleichen Breitenintervall zugrunde. Das Collokationsgitter für  $N=64, M=64$ , die Modelltopographie  $H(x,y)$  und die aus dem Windfeld berechnete Ekman-Geschwindigkeit  $w_E$  sind in Abb.II.5a - c dargestellt. Berechnet wurden drei Fälle mit verschieden starker Topographie:

$$\text{a) } b = 0, \quad \text{b) } b = 0.5 \cdot (H(x,y) - H_0), \quad \text{c) } b = H(x,y) - H_0$$

Die Ergebnisse zeigen Abb.II.6a - c. Diese Ergebnisse geben im wesentlichen den bekannten Sachverhalt wieder, daß barotrope Zirkulationsmodelle den Einfluß der Bodentopographie überbetonen, was in einer sehr starken Tendenz der Stromlinien, den  $\frac{f}{N} = \text{const.}$  Konturen zu folgen, seinen Ausdruck findet (siehe VERONIS, 1981). So verwundert es nicht, daß im  $P$ -Feld der Abb.II.4c sehr viele Details der Topographie deutlich wiederzuerkennen sind, wogegen der lokale Effekt der Antriebsfunktion  $w_E$  sehr in den Hintergrund rückt.

Aus numerischer Sicht zeigen die Ergebnisse recht eindeutig die Robustheit des Verfahrens zur Invertierung des FD-Operators  $L_{ap}$ . Als Referenzlösung dient hier die bekannte Stommel-Lösung für ein rechteckiges Becken mit ebenem Boden und einer sinus-förmigen Süd-Nord-Verteilung von  $w_E$ , wobei das Becken in etwa die gleiche Ausdehnung hat, wie in den obigen Fällen.

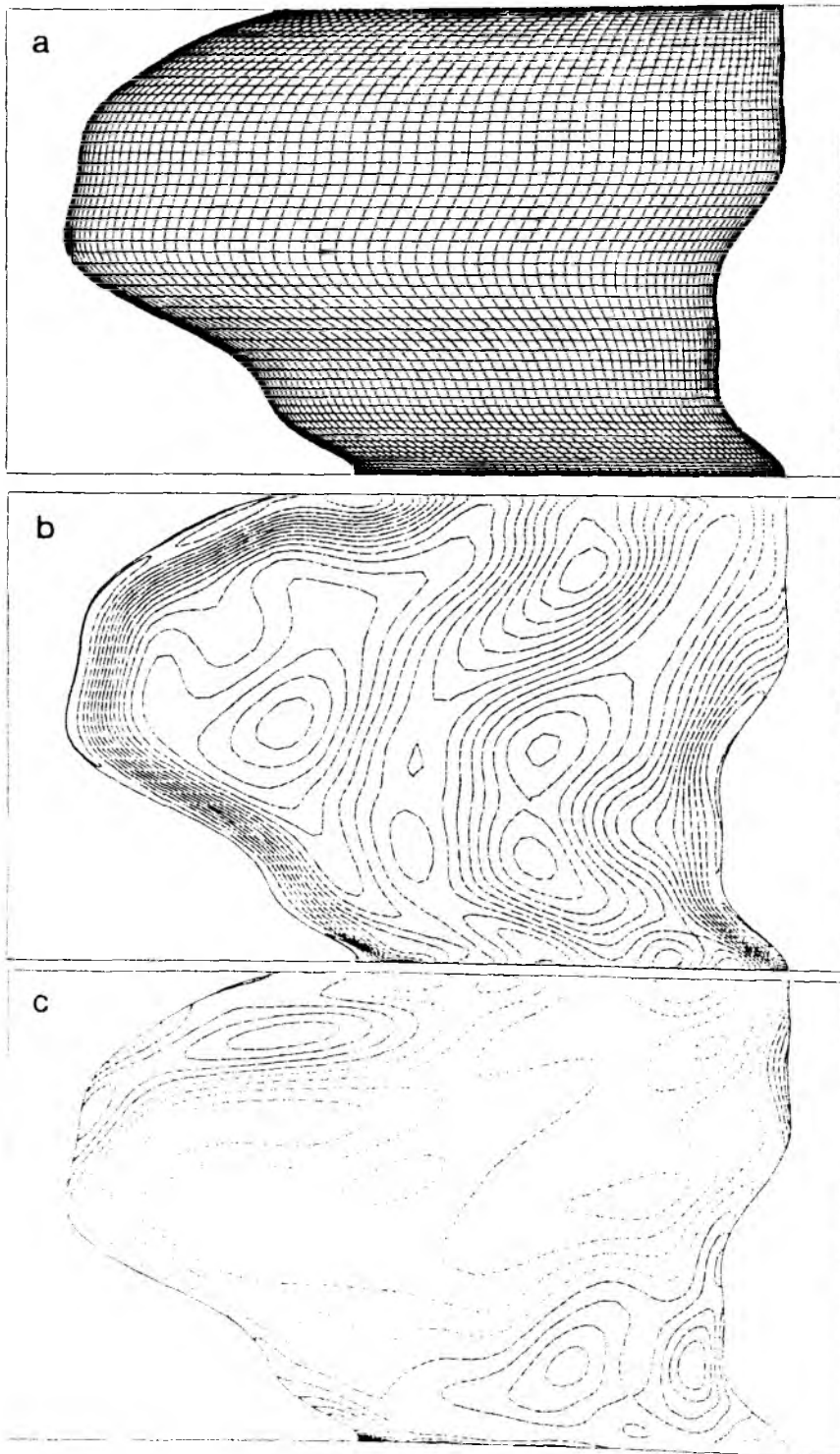


Abb. II.5

a) Collokationsgitter für  $N=64$ ,  $M=64$

b) Modell-Topographie  $H(x, y)$  (Linienabstand 250 m)

c) Ekman-Geschwindigkeit  $w_E$  (Linienabstand  $0.5 \cdot 10^{-4} \text{ cm sec}^{-1}$ )

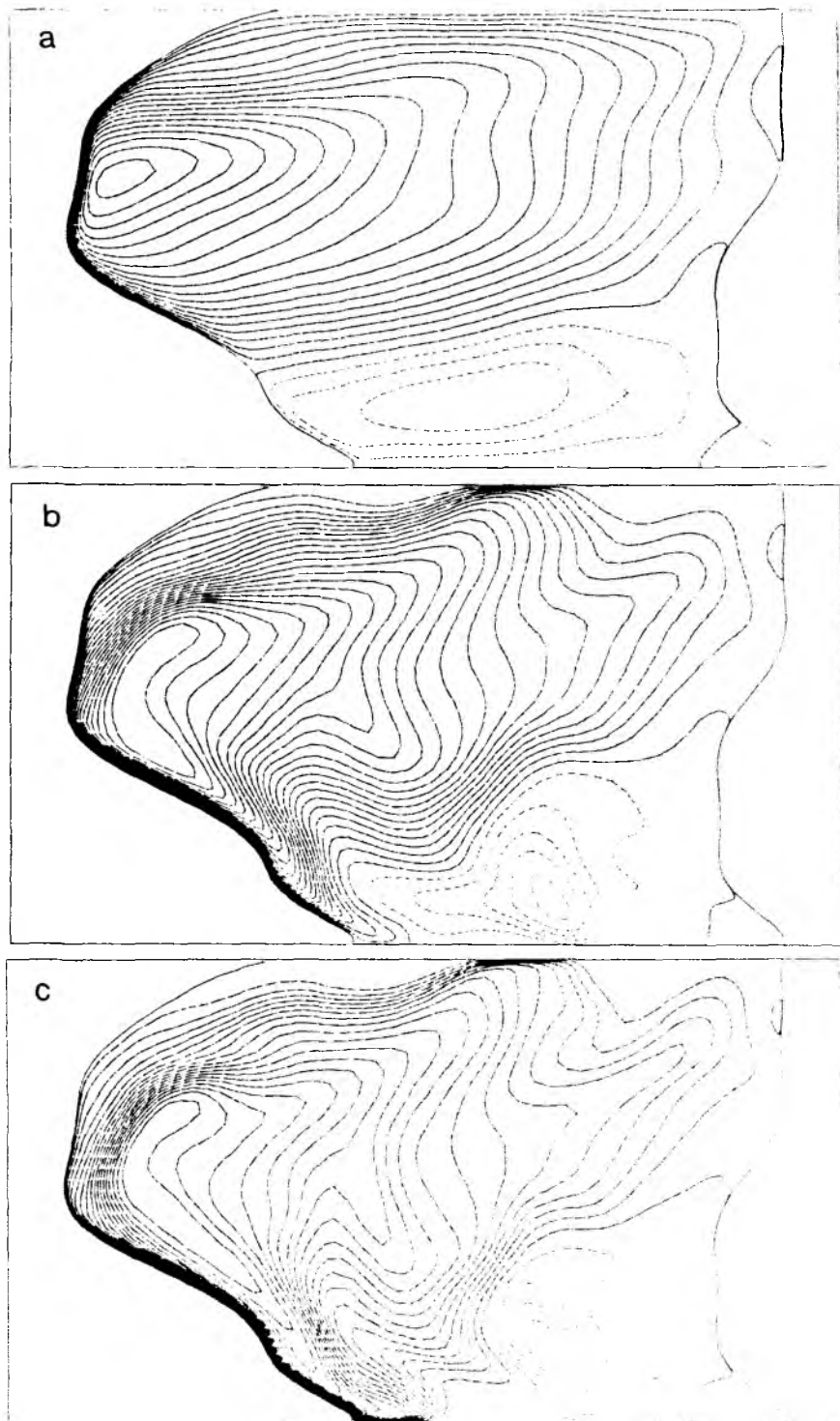


Abb. II.6 Lösung der stationären Stommel-Gleichung für

- a) ebenen Boden  $b = 0$  (Linienabstand 200)
- b)  $b = 0.5 \cdot (H(x, y) - H_0)$  (Linienabstand 150)
- c)  $b = H(x, y) - H_0$  (Linienabstand 150)



Die Rechenzeit zur Lösung dieses Problems betrug auf der PDP-10 des Rechenzentrums der Universität Kiel 14,6 sec. Die entsprechenden Zeiten für die Fälle a) bis c) sind 16,2 sec, 18,1 sec und 22,2 sec. Dabei wurde die Iteration in allen Fällen abgebrochen, wenn die Norm des Fehlers um den Faktor  $10^{-4}$  kleiner wurde als die Norm der rechten Seite. Diese Fehlerschranke liegt allerdings weiter unterhalb des Diskretisierungsfehlers. Legt man diesen Fehler als Abbruchkriterium zugrunde, so ergeben sich in allen vier Fällen Rechenzeiten von etwa 13 sec.

Etwas enttäuschend erscheint auf den ersten Blick der Gewinn durch Anwendung des Mehrgitter-Verfahrens. Eine Vergleichsrechnung, bei der nur auf dem feinsten Gitter gerechnet wurde, ergab 31,8 sec, 35,0 sec und 38,6 sec für die Fälle a) - c), d.h. das Mehrgitterverfahren beschleunigt die Iteration lediglich um den Faktor 2. Dieser Faktor verbessert sich allerdings wesentlich bei zunehmender Verfeinerung des Gitters. Daher wurde Fall c) noch einmal für  $N=M=128$  berechnet. Dabei ergaben sich ohne Mehrgitter 317 sec, mit nur 83 sec. Die Gründe für den relativ geringen Gewinn auf dem  $64 \times 64$  Gitter könnten zum einen in relativ schlecht gewählten Übergangskriterien, zum anderen in der ILU-Relaxation liegen. So lagen in allen Fällen die Konvergenzraten der ILU-Relaxationen auf dem feinsten Gitter zwischen 0,35 und 0,5, was für sich genommen ein recht befriedigender Wert ist, der nicht unbedingt den Übergang zu einem größeren Gitter nahe legt. Für  $N=M=128$  dagegen ergaben sich Raten von 0,8. Dies spiegelt die von WESSELING (1982) beschriebene Eigenschaft der ILU-Zerlegung wieder, mit größeren Gittern sehr schnell genauer zu werden. Schließlich kann ein weiterer Grund sein, daß alle oben beschriebenen Rechnungen auf dem größten Gitter begannen, was natürlich voraussetzt, daß die rechten Seiten zu Beginn bis zum größten Gitter hinunter restringiert werden müssen. Dies bedeutet bei den relativ geringen Rechenzeiten einen erheblichen Aufwand. Dieser Aufwand entfällt aber weitgehend im Zusammenhang mit dem Zeitschritt-Verfahren, da jeweils sehr gute Ausgangsnäherungen auf dem feinsten Gitter vorhanden sind, sobald die Lösung näherungsweise periodisch geworden ist. Dieses Vorgehen im Rahmen des vollständigen numerischen Modells wird in Abschnitt II.5 beschrieben.

## II.5 Das zeitabhängige Problem

Die Lösung des zeitabhängigen Problems erfordert noch die Erweiterung der in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Verfahren auf Systeme der Form 2.4. Die dabei auftretenden Operatoren  $L_0, L_1$  sind von der allgemeinen Form 2.19 und  $W$  ist ein Operator erster Ordnung. Das der Diskretisierung von 2.4 zugrunde liegende Collokationsgitter ist für beide Lösungsanteile identisch. Die Konstruktion des spektralen Operators ist offensichtlich und braucht hier nicht erläutert zu werden. Die Konstruktion des FD-Operators  $L_{op}$  zu 2.4 ist weniger offensichtlich und hängt davon ab, ob die Wechselwirkungen über dem Operator  $W$  als stark oder schwach anzusehen sind. Im vorliegenden Fall beschreibt der Operator  $W$  die Wechselwirkungen zwischen barotropem und baroklinem Lösungsanteil über Topographie, deren Stärke von verschiedenen Faktoren abhängt (SUGINOHARA, 1981) und die nicht von vornherein bekannt ist, so daß es sinnvoll erscheint, eine starke Kopplung anzunehmen, um so eine Möglichkeit für Parametervariationen zu wahren. Die Diskretisierung ist dann völlig analog zu 2.21, d.h.

$$\begin{aligned} (L_{op} \vec{p})_{i,j} &= U_{MM} \vec{p}_{i,j} + U_{M\theta} \vec{p}_{i,j-1} + U_{MP} \vec{p}_{i+1,j-1} \\ &+ U_{M\theta} \vec{p}_{i-1,j} + U_{P\theta} \vec{p}_{i,j} + U_{PP} \vec{p}_{i+1,j} \\ &+ U_{MP} \vec{p}_{i-1,j+1} + U_{\theta P} \vec{p}_{i,j+1} + U_{PP} \vec{p}_{i+1,j+1} = \vec{F}_{i,j} \end{aligned}$$

wobei gelten soll

$$\begin{aligned} \vec{p}_{i,j} &= \begin{pmatrix} p_{0,i,j} \\ p_{1,i,j} \end{pmatrix}, \quad \vec{F}_{i,j} = \begin{pmatrix} F_{0,i,j} \\ F_{1,i,j} \end{pmatrix} & i = 1, \dots, N-1 \\ & & j = 1, \dots, M-1 \\ U I \gamma_{i,j} &= \begin{pmatrix} L_0 I \gamma_{i,j} & W I \gamma_{i,j} \\ W I \gamma_{i,j} & L_1 I \gamma_{i,j} \end{pmatrix} & I, \gamma = M, \theta, P \end{aligned}$$

Alle Matricelemente von  $L_{qp}$  im skalaren Fall sind also hier ersetzt worden durch entsprechende  $2 \times 2$  Blockmatrizen. Damit geht die Bandstruktur des skalaren  $L_{qp}$  über in eine völlig identische Block-Bandstruktur im Falle des Systems 2.4. Alle Komponenten des Mehrgitterverfahrens einschließlich der ILU-Zerlegung 2.23 werden damit analog zum skalaren Fall definiert. Die Elemente der Blockmatrizen ergeben sich aus den skalaren Diskretisierungen der einzelnen Operatoren  $L_0$ ,  $L_1$  und  $L'$  (Appendix B). Das so konstruierte Mehrgitter-Verfahren hat die gleichen robusten Eigenschaften wie im skalaren Problem und erweist sich als sehr effizient. Eine alternative Formulierung für schwache Wechselwirkungen geben WESSELING und SONNEVELD (1980) an. Die Konvergenz der spektralen Defekt-Korrektur ist etwas stärker abhängig von der Topographie. In allen Rechnungen waren jedoch maximal zwölf Schritte erforderlich um das System 2.4 mit der Toleranz

$$\| \Delta^{(n)} \| \leq 10^{-4} \cdot \| \hat{p}^{(n)} \|$$

zu lösen (Bezeichnungen siehe 2.14).

Bevor nun ein erstes Anwendungsbeispiel des vollständigen numerischen Modell gegeben wird, soll kurz der Ablauf einer Rechnung einschließlich der Bestimmung der internen Parameter erläutert werden. Ausgangspunkt für jeden Lauf ist ein Datensatz der Topographie, der auf einem  $1^\circ$ -Gitter vorliegt. Die Geometrie des Beckens ist vollständig bestimmt durch die Vorgabe einer Tiefenlinie, die den westlichen und den östlichen Rand bildet, sowie durch das Breitenintervall in Süd-Nord-Richtung. Aus den Topographie-Daten und der Tiefenlinie werden die Funktionen

$f_1(y)$ ,  $f_2(y)$  und  $\beta(y)$  in 2.18 bestimmt und auf das Kollokationsgitter in  $y$ -Richtung interpoliert. Dabei werden die Funktionen spektral gefiltert, denn es hat sich gezeigt, daß der Rand hinreichend gut mit 16 Tschebyscheff-Polynomen beschrieben werden kann. Diese Filterung reduziert die Variabilität der Koeffizientenfunktionen und damit mögliche Aliasing-Fehler der spektralen Operatoren. Damit liegt das zweidimensionale Kollokationsgitter 2.20 fest, so daß alle in 2.19 benötigten variablen Koeffizienten auf diesem Gitter berechnet werden können, wobei alle

notwendigen Differentiationen spektral ausgeführt werden. Ebenso erhält man auf diesem Gitter die interpolierte Windschubspannung und daraus die Ekman-Geschwindigkeit  $w_E$ . Dies ergibt alle Komponenten des spektralen Operators  $L_{sp}$ . Aus diesen Komponenten wird gemäß Appendix B die Diskretisierung der Teiloperatoren des FD-Operators  $L_{qp}$  sowie dessen ILU-Zerlegung gewonnen (Appendix C). Schließlich wird  $L_{qp}$  für das Mehrgitterverfahren auf den gröberen Gittern konstruiert (Appendix D) und die zugehörige ILU-Zerlegung gebildet. Damit sind alle für einen Lauf notwendigen externen und internen Parameter bestimmt. Die Bestimmung dieser Parameter ist vollständig automatisiert, so daß Veränderungen problemlos vorgenommen werden können. Jedoch erfordert die vollständige Berechnung aller Operatoren abhängig von der Anzahl der Gitterpunkte einen relativ großen Aufwand, der aber im Vergleich zur eigentlichen zeitlichen Integration vernachlässigbar ist. Eine Integration erstreckt sich jeweils über 30 Modell-Jahre mit je vier Zeitschritten pro Jahr. Jede Integration beginnt mit der einmaligen Berechnung der zur Erfüllung der Randbedingung 1.16 notwendigen Lösung des homogenen Systems 2.4. In der ersten Phase der Rechnung (bis  $9at$ ) wird die Amplitude des Windfeldes linear von Null auf den tatsächlichen Wert gesteigert. Dies geschieht vornehmlich um eine mögliche, physikalisch aber irrelevante und numerisch unerwünschte halbjährliche Oszillation zu vermeiden. In den ersten fünf Jahren (bis  $20at$ ) wird die Lösung zu jedem Zeitschritt vollständig neu berechnet, d.h. im Mehrgitter-Verfahren ausgehend vom größten Gitter. Danach wird jeweils die ein Jahr zurückliegende Lösung als Anfangsnäherung auf dem feinsten Gitter verwendet. Diese fünf Jahre entsprechen etwa der Zeitspanne, die die baroklinen Wellen benötigen, um einmal den westlichen Rand des Beckens zu erreichen. Danach wird die Lösung näherungsweise periodisch, so daß die Anfangsnäherung schnell besser und das Verfahren erheblich beschleunigt wird. Nach zwanzig Jahren (  $90at$  ) setzt dann zu jedem Zeitschritt die spektrale Defekt-Korrektur ein. Das bedeutet natürlich auch, daß die rechten Seiten von 2.4 spektral ausgewertet werden müssen. Je nach Anzahl der zum Erreichen der vorgeschriebenen Toleranz (siehe oben) notwendigen spektralen Iterationen vervielfacht sich der Rechenaufwand pro Zeitschritt.

Allerdings nimmt die Zahl der Iterationen im Laufe der Rechnungen deutlich ab. Nach weiteren zehn Jahren Integrationszeit ist auch die spektrale Lösung periodisch geworden, d.h. die Amplituden der aperiodischen Komponenten betragen weniger als 0,1% der Amplituden des Jahresganges.

Abschließend wird hier das Ergebnis eines vollständigen Laufes diskutiert, das die Unterschiede zwischen spektraler und FD-Lösung sehr deutlich macht. Die Rechnung bezieht sich auf eine  $\beta$ -Ebene bei  $25^\circ\text{N}$  und ebenen Boden. Das jahreszeitliche Windfeld und alle anderen physikalischen Parameter entsprechen denen in Kapitel III für die gleichen Rechnungen. Hier wurde lediglich ein größerer barokliner Eigenwert von  $\lambda_1 = 1.83 \text{ sec}^2 \text{ cm}^{-2}$  gewählt. Dies ist der Eigenwert, den KRAUSS und WÜBBER (1982a) verwendeten. Der Lauf wurde mit  $N = M = 64$  ausgeführt, das Collokationsgitter entspricht also Abb.II.5a. Die Abb.II.7a,b zeigen das barokline Druckfeld nach dreißig Jahren Integrationszeit und zwar ohne spektrale Korrektur (a) und mit spektraler Korrektur während der letzten zehn Jahre (b). Beide Lösungen zeigen deutlich eine Reihe von Wellenzügen, die vom Ostrand ausgehen. Die Ost-West-Wellenlänge im spektralen Fall beträgt 850 km im ganzen Becken. Dies entspricht genau der von KRAUSS und WÜBBER (1982a) ermittelten resonanten Wellenlänge für Rossby-Wellen mit Jahresgang mit diesem Eigenwert und für  $25^\circ\text{N}$ . Dagegen variiert diese Wellenlänge in der FD-Lösung zwischen 720 km im Süden und Norden und etwa 660 km in der Mitte des Feldes. Sie ist also deutlich kürzer. Außerdem brechen die Wellenzüge der FD-Lösung in der nördlichen Beckenhälfte noch vor der Beckenmitte ziemlich unvermittelt ab, wohingegen die entsprechenden Wellen der spektralen Lösung teilweise den Westrand erreichen. Die Ursache für diese Unterschiede liegen nicht in einer verstärkten Dissipation der kürzeren Wellen (das Experiment wurde mit  $R_\nu = 0.5 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^{-1}$  mit dem gleichen Ergebnis wiederholt), sondern in der schlechten numerischen Approximation der FD-Lösung. Dies wird deutlich wenn man die numerische Dispersion der vereinfachten Gleichung 1.15 betrachtet:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla_H^2 p_1 - f_0^2 \lambda_1 p_1 \right) + \beta_0 \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad .$$

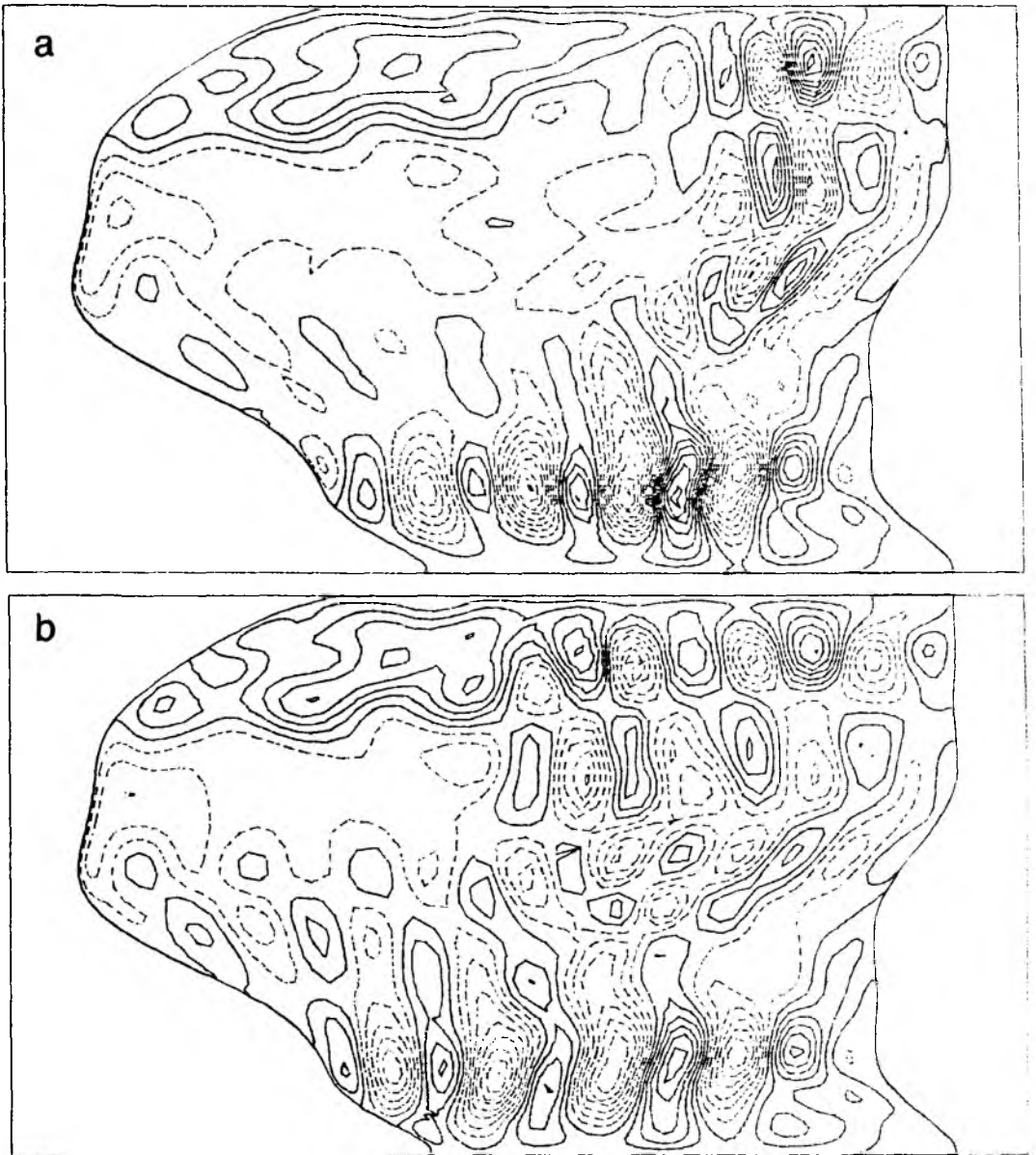


Abb. II.7 Momentaufnahme des baroklinen Druckfeldes  $P_1$  nach 30 Jahren

a) ohne spektrale Defektkorrektur  
b) mit spektraler Defektkorrektur

Für Wellen der Form

$$p_1 = \hat{p}_1 e^{i(\omega t - x x - y y)}$$

ergibt sich die bekannte analytische Dispersionsrelation freier Rossby-Wellen

$$\omega = \frac{-\beta x}{x^2 + y^2 + f_0^2 \lambda_1}$$

Wird diese Gleichung dagegen in der Zeit gemäß 2.2 und 2.3 und im Raum mit zentralen Differenzen diskretisiert, so erhält man für die gleichen Wellen die numerische Dispersionsrelation

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) &= \\ &= -\frac{1}{\omega_0} \cdot \tan\left(\frac{\omega_0 \Delta t}{2}\right) \frac{\beta x \cdot \left(\frac{\sin x \Delta x}{x \Delta x}\right)}{\frac{2}{\Delta x^2} (1 - \cos(x \Delta x)) + \frac{2}{\Delta y^2} (1 - \cos(y \Delta y)) + f_0^2 \lambda_1} \end{aligned}$$

Für  $\omega = \omega_0 = 2\pi / T_{\text{Jahr}}$  wie im obigen Beispiel gilt dann

$$\omega = \frac{-\beta x \cdot \left(\frac{\sin(x \Delta x)}{x \Delta x}\right)}{\frac{2}{\Delta x^2} (1 - \cos(x \Delta x)) + \frac{2}{\Delta y^2} (1 - \cos(y \Delta y)) + f_0^2 \lambda_1} \quad 2.28$$

Dies macht noch einmal klar, daß die zeitliche Diskretisierung exakt ist für die Funktionen, die mit  $\omega_0$  periodisch sind, so daß der Fehler alleine aus der räumlichen Diskretisierung resultiert. Offenbar geht 2.28 für jedes feste  $x, y$ -Paar in die entsprechende analytische Form über, falls  $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$  gehen. Weiter erkennt man, daß die scheinbare Phasengeschwindigkeit  $\omega/x$  zu Null wird für  $x \Delta x = \pi$ , was bei der kürzesten möglichen Wellenlänge  $2\Delta x$  der Fall ist.

Der interne Rossby-Radius ist in diesem Beispiel 38 km, d.h. auch die Wellen der FD-Lösung sind lang gegenüber  $R_i$ . Dafür läßt sich dann  $\alpha$  aus 2.28 näherungsweise bestimmen zu

$$\alpha = - \frac{\omega f_0^2 \lambda_1}{\beta_0} \cdot \left( \frac{\alpha \Delta x}{\sin(\alpha \Delta x)} \right) \geq \frac{\omega f_0^2 \lambda_1}{\beta_0} \quad , \quad 0 < \alpha \Delta x < \pi \quad .$$

Die für eine endliche Auflösung resultierenden Wellenlängen werden also stets kleiner sein als die analytisch berechneten. Mit den Parametern dieses Laues und einer schlechtesten räumlichen Auflösung von etwa 130 km ergibt sich eine zugehörige Wellenlänge von 754 km, was den FD-Ergebnissen sehr nahe kommt. Schließlich läßt sich zeigen, daß die aus 2.28 berechnete numerische Gruppengeschwindigkeit in Ost-West-Richtung bei dieser Auflösung ein falsches Vorzeichen erhält. Diese Aussagen gelten natürlich für ein äquidistantes Gitter und nicht für das variable Collokationsgitter. Trotzdem lassen sich damit alle Fehler-Merkmale der FD-Lösung befriedigend erklären. Es wird auch deutlich, warum die FD-Lösung in der südlichen Beckenhälfte mit relativ guter Auflösung wesentlich besser ist.

Dagegen scheint die spektrale Lösung im gesamten Becken frei von numerischer Dispersion zu sein und die korrekte Wellenlänge zu besitzen.

Die Rechenzeiten betrugen 58,2 Minuten für den FD-Lauf und 213 Minuten für die spektrale Lösung, d.h. pro Zeitschritt durchschnittlich 28 sec bzw. 106 sec. Dies zeigt zum einen, daß das Mehrgitterverfahren für Systeme von zwei Gleichungen lediglich den doppelten Zeitaufwand erfordert, zum anderen, daß die spektrale Korrektur nicht mehr als die vierfache Zeit der FD-Lösung beansprucht, was im Hinblick auf die besseren Ergebnisse durchaus gerechtfertigt erscheint.



### III. ERGEBNISSE DES ZEITABHÄNGIGEN MODELLS

#### III.1 Die massenerhaltende Randbedingung 1.16

Die Rechnungen mit dem oben beschriebenen Modell ergaben allgemein unrealistisch wirkende Resultate bei der Anwendung der von McWILLIAMS (1977) eingeführten Randbedingung 1.16. Bevor nun die Ergebnisse im einzelnen vorgestellt werden, sollen in diesem Abschnitt die Konsequenzen untersucht werden, die aus der Randbedingung 1.16 für zeitlich periodische Lösungen folgen.

Der hier betrachtete Modell-Ozean wird als vollständig abgeschlossenes Becken behandelt. Daraus ergibt sich zunächst nur die Forderung, daß kein Massenfluß über die horizontalen Ränder stattfindet. Diese Bedingung wäre für ein in den primitiven Gleichungen 1.1 - 1.3 formuliertes Modell völlig ausreichend zur vollständigen Bestimmung der Lösung und würde Massenerhaltung implizieren. Dies gilt ebenso für eine Lösung der aus 1.1 - 1.5 resultierenden, vollständigen Vorticity-Gleichung, falls zusätzlich eine der Ausgangsgleichungen als Bedingung gestellt wird. Davon haben z.B. KRAUSS und WÜBBER (1982b) wiederholt Gebrauch gemacht. Für die quasi-geostrophische Vorticity-Gleichung 1.8 gilt dieser Sachverhalt nicht. Zum einen wird für die Randbedingung  $p_0 = const$ ,  $p_1 = const$  Massenerhaltung nur für das geostrophische Geschwindigkeitsfeld 1.9, 1.10 gewährleistet, zum anderen läßt sich die beim Übergang zur Vorticity-Gleichung verlorengegangene zeitliche Integrationskonstante nicht aus den Ausgangsgleichungen bestimmen. Dies führt auf die explizite Forderung der Massenerhaltung auch für die ageostrophischen Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes und damit auf die Randbedingung 1.16. Natürlich handelt es sich dabei um eine mit der quasi-geostrophischen Approximation konsistente Forderung für ein abgeschlossenes Becken. Sie liefert jedoch Massenerhaltung auch nur im quasi-geostrophischen Sinn, d.h. der Defekt des ageostrophischen Geschwindigkeitsfeldes höherer Ordnung wird direkt im Druckfeld nullter Ordnung, dem "geostrophischen Druckfeld", kompensiert. Diese Kompensation kann aber in der Regel nur in schmalen Grenzschichten stattfinden, so daß sich die Frage stellt, ob mit der Randbedingung 1.16 eine für den gewählten Parameterbereich sinnvolle Approximation einer Lö-

sung der Ausgangsgleichungen 1.1 - 1.5 erhalten wird. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden:

Auf der  $\beta$ -Ebene mit ebenem Boden und zeitlich periodischem Antrieb lautet das zu lösende Problem für den baroklinen Anteil 1.15 mit der Randbedingung 1.16

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 p_1 - f^2 \lambda_1 p_1) + \beta \frac{\partial p_1}{\partial x} + R_1 \nabla^2 p_1 = \frac{f^2 p_0 z_1(0)}{H_0} w_E = \hat{w} e^{i\omega t} \quad 3.1$$

$$p_1 = c(t) \text{ auf } \partial \text{ mit } c(t) \text{ so, da} \beta \iint_{\Delta} p_1 dA = 0,$$

wobei  $\Delta$  das Integrationsgebiet und  $\partial$  dessen Rand ist.

Da es sich um ein lineares, gedämpftes System handelt, wird die Lösung ebenfalls periodisch sein, d.h. es gilt

$$p_1 = \hat{p}_1 e^{i\omega t}, \quad c = \hat{c} e^{i\omega t}.$$

Damit läßt sich die Gesamtlösung aufspalten in zwei Anteile gemäß

$$p_1 = p_H + p_I = \hat{p}_H e^{i\omega t} + \hat{c} \hat{p}_I e^{i\omega t}$$

wobei  $p_H$  und  $p_I$  Lösungen sind von

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 p_H - f^2 \lambda_1 p_H) + \beta \frac{\partial p_H}{\partial x} + R_1 \nabla^2 p_H = \hat{w} e^{i\omega t}, \quad p_H = 0 \text{ auf } \partial \quad 3.2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 p_I - f^2 \lambda_1 p_I) + \beta \frac{\partial p_I}{\partial x} + R_1 \nabla^2 p_I = 0, \quad p_I = e^{i\omega t} \text{ auf } \partial \quad 3.3$$

Aus der Randbedingung 1.16 ergibt sich dann die Integrationskonstante  $\hat{c}$  zu

$$\hat{c} = - \iint_{\Delta} p_H dA / \iint_{\Delta} p_I dA \quad 3.4$$

Durch den Übergang auf  $\tilde{p}_I = p_I \cdot e^{i\omega t}$  ergibt sich für  $\tilde{p}_I$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \sigma^2 \tilde{p}_I - f^2 \lambda_1 \tilde{p}_I \right) + \beta \frac{\partial \tilde{p}_I}{\partial x} + R_1 \nabla^2 \tilde{p}_I = i\omega f^2 \lambda_1 e^{i\omega t}, \quad \tilde{p}_I = 0 \text{ auf } \partial \quad 3.5$$

Dieses Problem ist bis auf die räumlich konstante Antriebsfunktion identisch mit 3.2 und die zugehörige Lösung läßt sich wie folgt charakterisieren:

Im Inneren des Beckens ist  $\tilde{p}_I \approx -e^{i\omega t}$  in nullter Näherung eine Lösung, während die homogene Randbedingung einen zeitlich periodischen Randstrom erzwingt, der in gleicher Phase das gesamte Becken umströmt. Dadurch werden wiederum am Ostrand Rossby-Wellen relativ geringer Amplitude erzeugt, die im Beckeninneren für die Abweichung der Lösung von  $-e^{i\omega t}$  verantwortlich sind. Dieser Mechanismus entspricht genau dem von LIPPERT und KÄSE (1985) beschriebenen "zero-wavenumber-forcing", hier allerdings für ein geschlossenes Becken. Das zugehörige Wellenfeld ist eine rein zonal wandernde, gedämpfte Rossby-Welle, deren Nord-Süd-Ausdehnung nur durch die Dimension des Beckens begrenzt ist. Diese Lösung läßt sich schematisch darstellen als

$$\tilde{p}_I = (RW + RS - 1) e^{i\omega t}$$

wobei  $RW$  der Rossby-Wellen-Anteil,  $RS$  der Randstrom-Anteil ist.

Die Lösung  $p_I$  dagegen ist im Inneren des Beckens bis auf die Rossby-Wellen nahezu Null, weist aber den gleichen starken Randstrom auf. Mit der Definition von  $\tilde{p}_I$  ergibt sich also im gleichen Schema

$$p_I = (RW + RS) \cdot e^{i\omega t}$$

Als Beispiel für diesen Lösungsanteil ist  $p_I$  in Abb.III.1 für ein rechteckiges Becken der Dimension 5500 km x 4400 km und für Parameter entsprechend 25°N sowie Jahresperiode dargestellt.

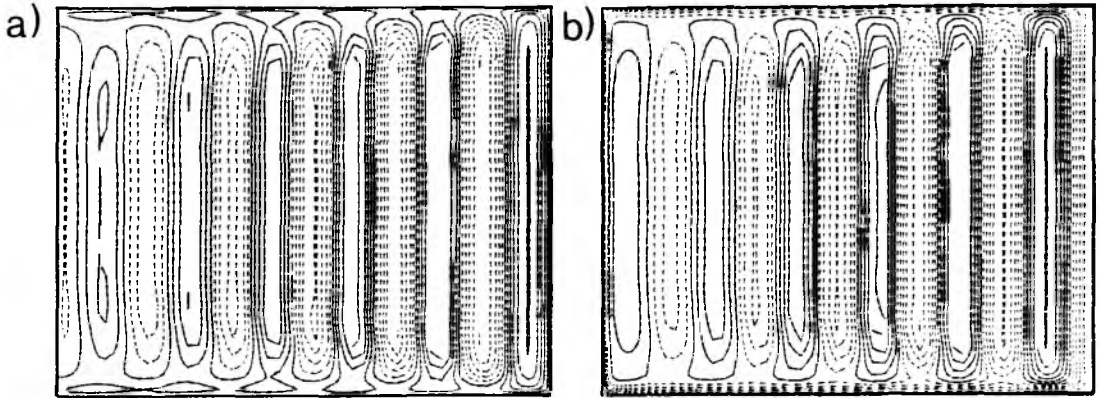


Abb. III.1 Zusatzlösung  $P_I$  der massenerhaltenden Randbedingung,  $\tau = 1$  Jahr  
a)  $t = \tau/4$ , b)  $t = \tau/2$ , Linienabstand 0,2

Die Gesamtlösung  $P_1$  setzt sich schließlich aus den Anteilen  $P_H$  und  $P_I$  zusammen, wobei  $P_H$  in Amplitude und Struktur direkt von der Antriebsfunktion  $w_E$  abhängt, während  $P_I$  in der Struktur alleine durch die Parameter des Beckens und die vorgegebene Frequenz, in der Amplitude lediglich durch die Konstante  $\hat{c}$  festgelegt ist. Damit kommt  $P_I$  den charakteristischen Merkmalen der Eigenlösung des Problems 3.1 sehr nahe. Ob diese Lösung mit dem durch die quasi-geostrophische Approximation bedingten starken Randstrom zum dominierenden Teil der Gesamtlösung wird, hängt von der Konstante  $\hat{c}$  ab.

Es liegt die Vermutung nahe, daß  $\hat{c}$  in diesem linearen Problem wesentlich durch einen von Null verschiedenen räumlichen Mittelwert  $\overline{w_E}$  der Ekman-Geschwindigkeit geprägt wird. Ersetzt man nun in 3.1  $\hat{w}$  durch die Konstante  $\overline{w_E}$ , so werden die Probleme 3.2 und 3.5 völlig äquivalent und es gilt

$$P_H = -i \cdot \frac{\tilde{P}_I}{H_0 \omega \tau_1} \frac{S_0 \tau_1(0)}{\overline{w_E}}$$

Dabei ergibt sich dann  $\hat{c}$  zu

$$\hat{c} = i \cdot \frac{S_0 \tau_1(0)}{H_0 \omega \tau_1} \overline{w_E} \frac{\iint_{\Delta} (RW + RS - 1) d\Delta}{\iint_{\Delta} (RW + RS) d\Delta}$$

Geht man weiter davon aus, daß das räumliche Mittel des Rossby-Wellen-Feldes klein ist, so läßt sich eine einfache Abschätzung der Integrale erreichen. Eine Skalenanalyse der Gleichung 3.5 ergibt folgende Grenzschichtdicken

$$D_N = D_S = R_i \left( \frac{\omega + R_i}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \approx R_i \quad \text{im Süden und Norden}$$

$$D_W = R_i \cdot \left( \frac{\beta R_i}{2\omega} - \left( \left( \frac{\beta R_i}{2\omega} \right)^2 + \frac{\omega + R_i}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \approx R_i \quad \text{im Westen}$$

$$D_O = R_i \left( \frac{\beta R_i}{2\omega} + \left( \left( \frac{\beta R_i}{2\omega} \right)^2 + \frac{\omega + R_i}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \approx 6 R_i \quad \text{im Osten}$$

wobei  $R_i$  der interne Rossby-Radius ist, der für die Parameter in Kapitel I. 39,6 km beträgt. Nimmt man weiter die Amplitude des Randstroms in diesen Grenzschichten zu 0,5 an, so erhält man für das rechteckige Becken aus Abb.III.1 die Abschätzung

$$\iint_{\Delta} RS \, d\Delta = 0 \left( \iint_{\Delta} 1 \, d\Delta \cdot 10^{-2} \right), \text{ d.h. } \frac{\iint_{\Delta} (RS-1) \, d\Delta}{\iint_{\Delta} RS \, d\Delta} \approx 100$$

In diesem Fall erhält also die Randstromlösung  $P_I$  einen Verstärkungsfaktor von 100 gegenüber  $P_H$ . Nimmt man für  $\overline{w_E}$  den für ein realistisches Windfeld sicherlich sehr niedrigen Wert von  $10^{-6} \text{ cm/sec}$  an, so ergibt sich schließlich  $\hat{c} \approx 200$ .

Diese grobe Abschätzung zeigt zumindest, daß die Gesamtlösung sehr empfindlich auf einen von Null verschiedenen räumlichen Mittelwert von  $P_H$  reagiert, so daß die Randlösung durchaus dominierend werden kann. Diese Aussage bleibt auch dann richtig, wenn man annimmt, daß die Abweichungen der Ekman-Geschwindigkeit vom Mittelwert  $\overline{w_E}$  wesentlich größer sind als  $\overline{w_E}$  selbst. In diesem Fall werden auch die Amplituden des zu  $P_H$  gehörenden Rossby-Wellen-Feldes wesentlich größer sein, so daß deren Defekt nicht mehr vernachlässigbar ist. Dies spiegelt sich in einem Vergleich

der Lösungen mit  $P_1 = 0$  (siehe Kapitel III.3) und  $P_1 = C(6)$  (siehe Appendix E) als Randbedingung deutlich wider. Während im ersten Fall keinerlei Merkmale eines "zero-wavenumber-forcing" zu erkennen sind - was anzeigt, daß der Effekt von  $\overline{w_E}$  von untergeordneter Bedeutung ist - ergeben sich im zweiten Fall Lösungen, die dem Beispiel aus Abb.III.1 sehr ähnlich sind.

Die Abschätzung des Beitrages der Randstromlösung  $P_E$  zur Gesamtlösung zeigt, daß dieser bestimmt ist vom Verhältnis der Fläche des Beckens zu der Fläche, die von den Grenzschichten eingenommen wird. Deren Breite hängt wiederum von der Zeitskala des Problems ab. So nehmen alle vier Grenzschichten für sehr kurze Zeitskalen ihre minimale Breite  $P_E$  an, während sie für sehr lange Zeitskalen zunehmend breiter werden, bis sie schließlich das gesamte Becken ausfüllen und die Lösung  $P_E$  ihren Randstromcharakter verliert. Dies wird auch an Gleichung 3.3 deutlich, deren Lösung für  $\omega = 0$  offenbar  $P_E \equiv 1$  ist. Daher spielt dieser Randeffect bei den in einem statistisch stationären Gleichgewichtszustand betriebenen quasi-geostrophischen Modellen keine große Rolle, wie z.B. die Zusammenfassung der Ergebnisse wirbelauflösender Modelle von HOLLAND et al. (1983) zeigt, wohingegen die quasi-geostrophischen Eigenschwingungen eines abgeschlossenen Beckens mit der Randbedingung 1.16 in ihren Strukturen längs des Beckenrandes zum Teil erheblich von den Lösungen mit  $P_1 = 0$  als Randbedingung abweichen (FLIERL, 1977).

Das Ergebnis der obigen Diskussion läßt sich im Hinblick auf das vorliegende Problem wie folgt zusammenfassen:

Die erforderliche Beschränkung des Modells auf einen Ausschnitt eines größeren Ozeans macht mangels sinnvoller offener Randbedingungen für die künstlichen Ränder im Norden und Süden die Behandlung dieses Ausschnitts als abgeschlossenes Becken notwendig. Die quasi-geostrophische Approximation ergibt dann mit der massenerhaltenden Randbedingung 1.16 eine zusätzliche Lösungskomponente, die ihrem Charakter nach eher einer Eigenlösung des Problems entspricht als einer direkten Reaktion des Modell-Ozeans auf das antreibende Windfeld. Bei der für barokline Rossby-Wellen - gemessen an den Dimensionen des Beckens - relativ kurzen

Geht man weiter davon aus, daß das räumliche Mittel des Rossby-Wellen-Feldes klein ist, so läßt sich eine einfache Abschätzung der Integrale erreichen. Eine Skalenanalyse der Gleichung 3.5 ergibt folgende Grenzschichtdicken

$$D_N = D_S = R_i \left( \frac{\omega + R_i}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \approx R_i \quad \text{im Süden und Norden}$$

$$D_W = R_i \left( \frac{\beta R_i}{2\omega} - \left( \left( \frac{\beta R_i}{2\omega} \right)^2 + \frac{\omega + R_i}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \approx R_i \quad \text{im Westen}$$

$$D_O = R_i \left( \frac{\beta R_i}{2\omega} + \left( \left( \frac{\beta R_i}{2\omega} \right)^2 + \frac{\omega + R_i}{\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \approx 6 R_i \quad \text{im Osten}$$

wobei  $R_i$  der interne Rossby-Radius ist, der für die Parameter in Kapitel I. 39,6 km beträgt. Nimmt man weiter die Amplitude des Randstroms in diesen Grenzschichten zu 0,5 an, so erhält man für das rechteckige Becken aus Abb.III.1 die Abschätzung

$$\iint_{\Delta} RS \, d\Delta = 0 \left( \iint_{\Delta} 1 \, d\Delta \cdot 10^{-2} \right), \text{ d.h. } \frac{\iint_{\Delta} (RS-1) \, d\Delta}{\iint_{\Delta} RS \, d\Delta} \approx 100$$

In diesem Fall erhält also die Randstromlösung  $P_x$  einen Verstärkungsfaktor von 100 gegenüber  $P_H$ . Nimmt man für  $\overline{w_E}$  den für ein realistisches Windfeld sicherlich sehr niedrigen Wert von  $10^{-6} \text{ cm/sec}$  an, so ergibt sich schließlich  $\hat{c} \approx 200$ .

Diese grobe Abschätzung zeigt zumindest, daß die Gesamtlösung sehr empfindlich auf einen von Null verschiedenen räumlichen Mittelwert von  $P_H$  reagiert, so daß die Randlösung durchaus dominierend werden kann. Diese Aussage bleibt auch dann richtig, wenn man annimmt, daß die Abweichungen der Ekman-Geschwindigkeit vom Mittelwert  $\overline{w_E}$  wesentlich größer sind als  $\overline{w_E}$  selbst. In diesem Fall werden auch die Amplituden des zu  $P_H$  gehörenden Rossby-Wellen-Feldes wesentlich größer sein, so daß deren Defekt nicht mehr vernachlässigbar ist. Dies spiegelt sich in einem Vergleich

der Lösungen mit  $P_r = 0$  (siehe Kapitel III.3) und  $P_r = c(t)$  (siehe Appendix E) als Randbedingung deutlich wider. Während im ersten Fall keinerlei Merkmale eines "zero-wavenumber-forcing" zu erkennen sind - was anzeigt, daß der Effekt von  $\overline{w_E}$  von untergeordneter Bedeutung ist - ergeben sich im zweiten Fall Lösungen, die dem Beispiel aus Abb.III.1 sehr ähnlich sind.

Die Abschätzung des Beitrages der Randstromlösung  $P_r$  zur Gesamtlösung zeigt, daß dieser bestimmt ist vom Verhältnis der Fläche des Beckens zu der Fläche, die von den Grenzschichten eingenommen wird. Deren Breite hängt wiederum von der Zeitskala des Problems ab. So nehmen alle vier Grenzschichten für sehr kurze Zeitskalen ihre minimale Breite  $P_{r_0}$  an, während sie für sehr lange Zeitskalen zunehmend breiter werden, bis sie schließlich das gesamte Becken ausfüllen und die Lösung  $P_r$  ihren Randstromcharakter verliert. Dies wird auch an Gleichung 3.3 deutlich, deren Lösung für  $\omega = 0$  offenbar  $P_r \equiv 1$  ist. Daher spielt dieser Randeffect bei den in einem statistisch stationären Gleichgewichtszustand betriebenen quasi-geostrophischen Modellen keine große Rolle, wie z.B. die Zusammenfassung der Ergebnisse wirbelauflösender Modelle von HOLLAND et al. (1983) zeigt, wohingegen die quasi-geostrophischen Eigenschwingungen eines abgeschlossenen Beckens mit der Randbedingung 1.16 in ihren Strukturen längs des Beckenrandes zum Teil erheblich von den Lösungen mit  $P_r = 0$  als Randbedingung abweichen (FLIERL, 1977).

Das Ergebnis der obigen Diskussion läßt sich im Hinblick auf das vorliegende Problem wie folgt zusammenfassen:

Die erforderliche Beschränkung des Modells auf einen Ausschnitt eines größeren Ozeans macht mangels sinnvoller offener Randbedingungen für die künstlichen Ränder im Norden und Süden die Behandlung dieses Ausschnitts als abgeschlossenes Becken notwendig. Die quasi-geostrophische Approximation ergibt dann mit der massenerhaltenden Randbedingung 1.16 eine zusätzliche Lösungskomponente, die ihrem Charakter nach eher einer Eigenlösung des Problems entspricht als einer direkten Reaktion des Modell-Ozeans auf das antreibende Windfeld. Bei der für barokline Rossby-Wellen - gemessen an den Dimensionen des Beckens - relativ kurzen



Zeitskala von einem Jahr wird diese Lösung zum dominierenden Teil der Gesamtlösung und führt so zu einer extremen Betonung der hier künstlichen Abgeschlossenheit des Beckens. Es ist einleuchtend, daß bei der Berechnung von Eigenschwingungen die Abgeschlossenheit des Beckens das wesentliche Merkmal des Problems ist und somit auch die Erhaltung der Gesamtmasse erfordert. Es bleibt aber auch hier die Frage, ob der dazu notwendige Randstrom eine reale physikalische Erscheinung ist oder nur der Ausdruck dessen, daß durch die quasi-geostrophische Approximation einige wesentliche Prozesse wie z.B. Trägheits- und Schwerewellen eliminiert werden, die in der Lage wären, den Massendefekt der inneren geostrophischen Lösung auf wesentlich kürzere Zeitskalen zu kompensieren, als dies die langsamen planetarischen Wellen vermögen. Diese Frage kann in der vorliegenden Arbeit nicht beantwortet werden, jedoch zeigt ein im gleichen Parameter-Bereich betriebenes und auf den primitiven Gleichungen beruhendes Modell von ANDERSON und CORRY (1985a,b) kein Anzeichen eines beckenumfassenden Randstroms, so daß zumindest im Bereich der Jahresperiode die zweite Möglichkeit plausibler erscheint.

Aus diesen Gründen werden in den folgenden Abschnitten nur die Lösungen mit  $P_r = 0$  als Randwert diskutiert. Die entsprechenden Lösungen mit der Randbedingung 1.16 sind im Appendix E zusammengefaßt.

### III.2 Allgemeine Parameter

In diesem Abschnitt werden die physikalischen und numerischen Parameter aller Rechnungen zusammengefaßt, die verschiedenen Rechnungen selbst dokumentiert sowie die Darstellung der Lösungen erläutert.

Allen Rechnungen gemeinsam sind die konstanten Faktoren der Gleichungen 1.14 und 1.15. Die Wahl der Werte bzw. ihre Herkunft ist in Kapitel I. er-

klärt. Sie lauten:

$$R_0 = 10^{-6}, \quad R_1 = 10^{-7} \text{ sec}^{-1}$$

Reibungskoeffizienten

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = 1.68 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^2 \text{ cm}^{-2}$$

Eigenwerte

$$z_0(0) = 1, \quad z_1(0) = 3.65$$

Werte der Eigenfunktionen an  
Oberfläche und Bezugstiefe

$$z_0(-H_0) = 1, \quad z_1(-H_0) = -0.51$$

$$z_{00} = 2.49 \cdot 10^{-6}, \quad z_{11} = 6.47 \cdot 10^{-7} \text{ cm}^{-1}$$

Topographie-Terme

$$z_{10} = 1.27 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$$

Wechselwirkungsterm

Diesen Werten liegt eine Bezugstiefe  $H_0 = 4225$  m zugrunde, die sich als Mittelwert der verwendeten Modelltopographie ergibt. Die Topographie selbst entspricht der von KRAUSS (1985) verwendeten und liegt auf einem  $1^\circ$ -Gitter vor. Die maximale Tiefe ist 6142 m, die minimale 1982 m. Sie ist für das Breitenintervall von  $5^\circ\text{N} - 45^\circ\text{N}$  in Abb.III.2 dargestellt.

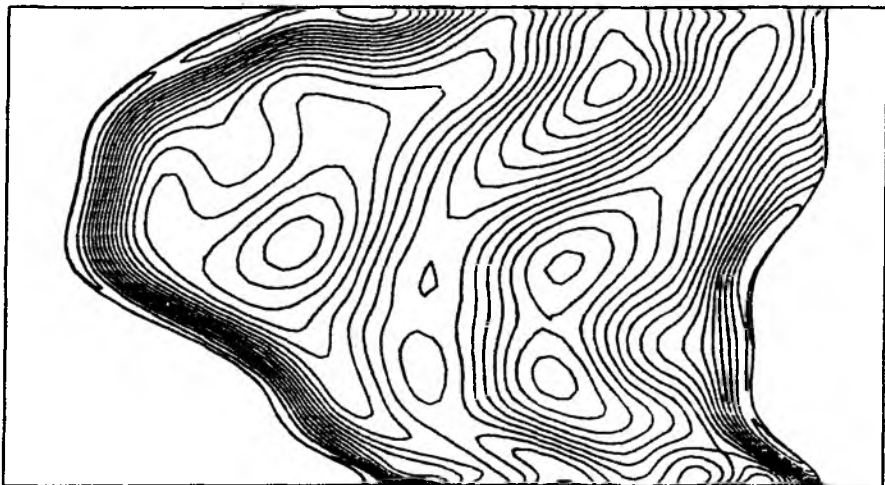


Abb. III.2 Modell-Topographie  $H(x, y)$  (Linienabstand 250 m)

Alle weiteren internen Modell-Parameter werden wie in Kapitel II.5 aus dieser Topographie abgeleitet. Sämtliche Rechnungen werden mit  $N = 128$  (West-Ost) und  $M = 64$  (Süd-Nord) Punkten ausgeführt. Das zugehörige Collokationsgitter ist in Abb.III.3 wiedergegeben. Dabei beträgt die schlechteste räumliche Auflösung in der Mitte des Beckens etwa 85 km (West-Ost) und 108 km (Süd-Nord).

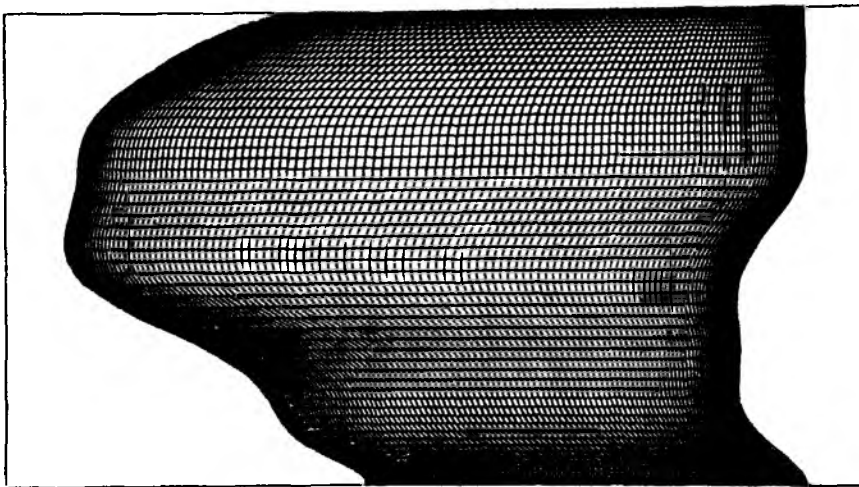


Abb. III.3 Collokationsgitter für  $N = 128$ ,  $M = 64$

Die Antriebsfunktion  $W_E$  beruht auf dem von ISEMER und HASSE (1986) aus dem Bunker-Datensatz gewonnenen Feld der Windschubspannung. Dieses Feld liegt in monatlichen Mittelwerten ebenfalls auf einem  $1^\circ$ -Gitter vor. Für die Anwendung in dem vorliegenden Modell wurden zunächst durch zeitliche Fourier-Analyse die Koeffizienten der Jahresperiode bestimmt, so daß das Modell-Windfeld gegeben ist durch

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_c \cos \omega_0 t + \vec{\tau}_s \sin \omega_0 t, \quad \omega_0 = 2\pi / \text{Jahr}$$

Die so bestimmten Vektoren  $\vec{\tau}_c$  und  $\vec{\tau}_s$  wurden auf das Collokationsgitter interpoliert und daraus durch spektrale Ableitung die Ekman-Geschwindigkeit

$$W_E = W_{E_c} \cos \omega_0 t + W_{E_s} \sin \omega_0 t, \quad W_{E_c} = \nabla \times \left( \frac{\vec{\tau}_c}{f} \right), \quad W_{E_s} = \nabla \times \left( \frac{\vec{\tau}_s}{f} \right)$$

berechnet.

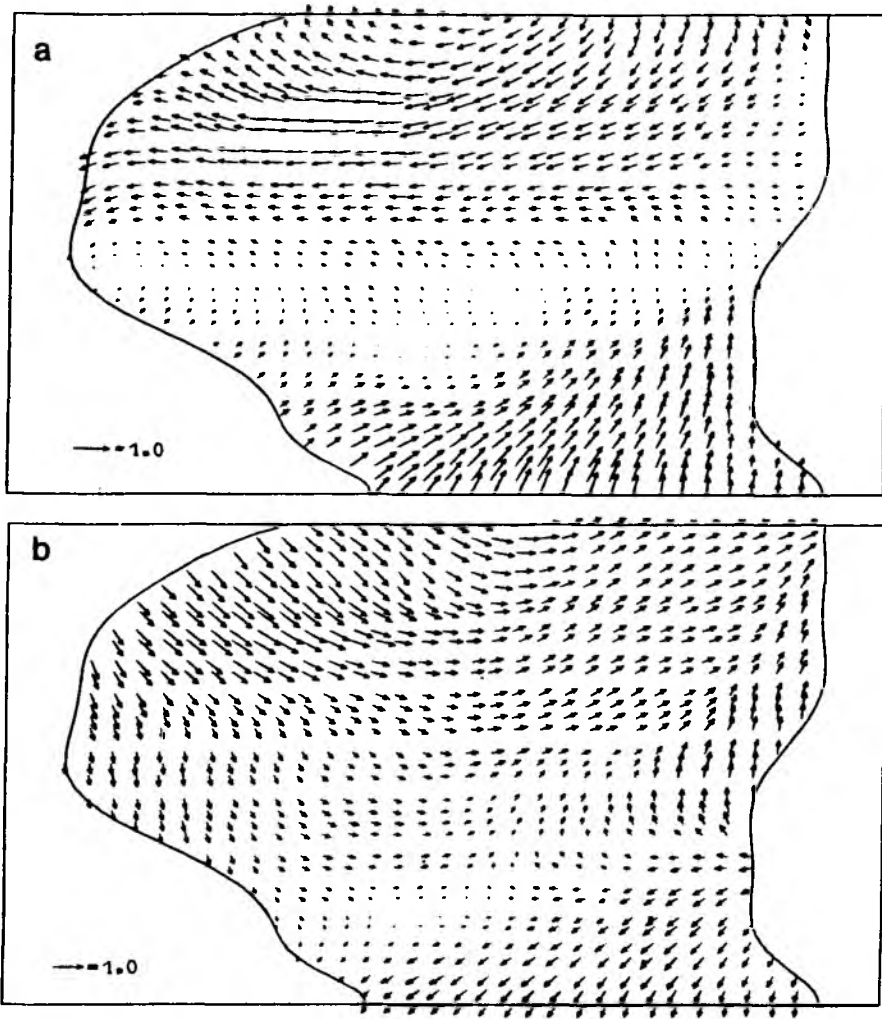


Abb. III.4 Feld der Modell-Windschubspannung ( $\text{dyne/cm}^2$ )

Alle Rechnungen wurden mit dem maximalen Zeitschritt von drei Monaten ausgeführt. Die Integrationszeit betrug jeweils dreißig Jahre, wovon die letzten zehn Jahre mit spektraler Defekt-Korrektur gerechnet wurden. Der zeitliche Bezugspunkt wurde für das Windfeld und damit auch für die Lösungen so gewählt, daß sich die vier Zeitpunkte pro Jahr wie folgt verteilen:

$$\begin{aligned}
 t_0 &= 0 \bmod 1 \text{ Jahr} && \hat{=} 1. \text{Januar} \\
 t_1 &= t_0 + \Delta t && \hat{=} 1. \text{April} \\
 t_2 &= t_0 + 2\Delta t && \hat{=} 1. \text{Juli} \\
 t_3 &= t_0 + 3\Delta t && \hat{=} 1. \text{Oktober}
 \end{aligned}$$

Das Windfeld ist in Abb.III.4a,b für die Zeitpunkte  $t_3$  und  $t_0$  dargestellt.

Die zeitliche Fourier-Analyse der beiden Lösungsanteile  $P_0$  und  $P_1$  im dreißigsten Jahr ergibt zunächst

$$A_{i0} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 P_i(t_k) \quad , \quad A_{i2} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^3 P_i(t_k) \cos(2\omega_0 t_k) \quad i=0,1$$

$$A_i = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 P_i(t_k) \cos(\omega_0 t_k) \quad , \quad B_i = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^3 P_i(t_k) \sin(\omega_0 t_k)$$

wobei in allen Rechnungen erreicht wurde

$$\|A_{i0}\|, \|A_{i2}\| < \| (A_i^2 + B_i^2)^{\frac{1}{2}} \| \cdot 10^{-3} \quad , \quad i=0,1$$

Alle weiteren Angaben und alle abgeleiteten Größen beziehen sich dann auf die Darstellung

$$P_i = A_i \cos \omega_0 t + B_i \sin \omega_0 t \quad , \quad i=0,1$$

Jeder berechnete Fall wird dokumentiert durch die beiden Lösungsanteile  $P_0$  und  $P_1$  zu den Zeitpunkten  $t_3$  und  $t_0$  sowie durch die Darstellung der Vektoren der lokalen Phasengeschwindigkeit für den baroklinen Anteil. Diese folgen aus

$$P_1 = \tilde{P}_1 \cos(\omega_0 t - \phi(1, \varphi)) \quad \text{mit}$$

$$\phi = \arctan(B_1/A_1) \quad , \quad \tilde{P}_1 = (A_1^2 + B_1^2)^{\frac{1}{2}}$$

gemäß

$$\vec{c} = \frac{\omega_0}{|\nabla \phi|^2} \cdot \nabla \phi \quad .$$

### III.3 Ergebnisse

Als Grundlage für die Diskussion der übrigen Fälle dient hier die Lösung auf der  $\beta$ -Ebene bei  $25^\circ\text{N}$  für ebenen Boden, deren Ergebnisse in Abb.III.5a-e dargestellt sind. In diesem Fall sind barotrope und barokline Lösungskomponenten vollständig entkoppelt.

Die barotrope Lösung zeigt eine sehr großräumige Struktur im Inneren des Beckens. Bei diesen Horizontalskalen spielen die Effekte der relativen Vorticity und der Reibung eine untergeordnete Rolle, so daß die Lösung zu jedem Zeitpunkt und ohne Phasenverzögerung im Sverdrup-Gleichgewicht mit der antreibenden Kraft steht:

$$\beta_0 \frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{f_0^2 S_0 z_0(t)}{H_0} w_E$$

Der gleichmäßige Anstieg von  $p_0$  bis zu den Extremwerten im Westen dokumentiert die geringe zonale Variabilität der Antriebsfunktion  $w_E$ . Lediglich in einem Streifen längs des östlichen Randes treten größere Phasenunterschiede auf. In Nord-Süd-Richtung lassen sich drei Regionen erkennen, die jeweils räumlich getrennte Extremwerte im Westen besitzen: Eine südliche Zone bis  $20^\circ\text{N}$ , eine mittlere Zone zwischen  $20^\circ\text{N}$  und  $35^\circ\text{N}$  in gleicher Phasenlage sowie eine Zone nördlich von  $35^\circ\text{N}$  in entgegengesetzter Phasenlage. Ein Vergleich der Abbildung III.5a und III.5b zeigt, daß diese Struktur während der ganzen Periode annähernd erhalten bleibt, d.h. die Phasensprünge ändern ihre Lage nur sehr wenig. Prinzipiell stimmen diese Ergebnisse mit denen von ANDERSON und CORRY (1985b) für ebenen Boden überein, wobei jedoch zu beachten ist, daß hier lediglich die Fourier-Komponente des Windfeldes mit Jahresperiode verwendet wird. Daher rührt auch die niedrigere Amplitude im Transport des westlichen Randstroms bei  $30^\circ\text{N}$ , dessen Maximalwerte von 13 Sverdrup im März (nordwärts) und im September (südwärts) angenommen werden.

Auch das Wellenfeld der baroklinen Lösung läßt sich in die drei oben definierten Breitenintervalle einteilen, wobei sich die südliche und die nördliche Zone durch relativ hohe Amplituden auszeichnen. Die Ost-West-

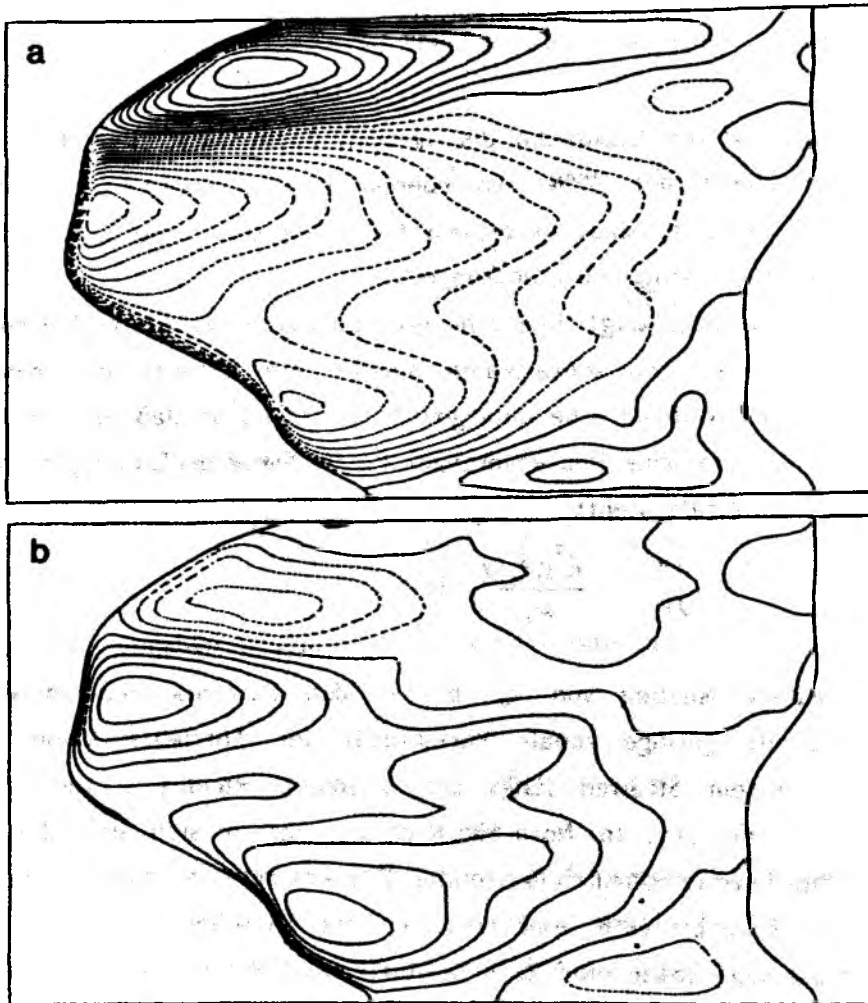


Abb. III.5 Lösung auf der  $\beta$ -Ebene ohne Topographie

a) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_3$

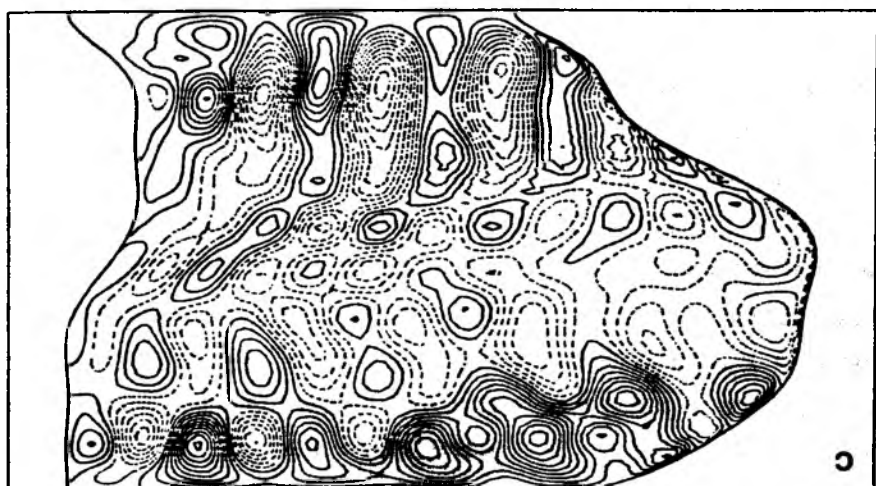
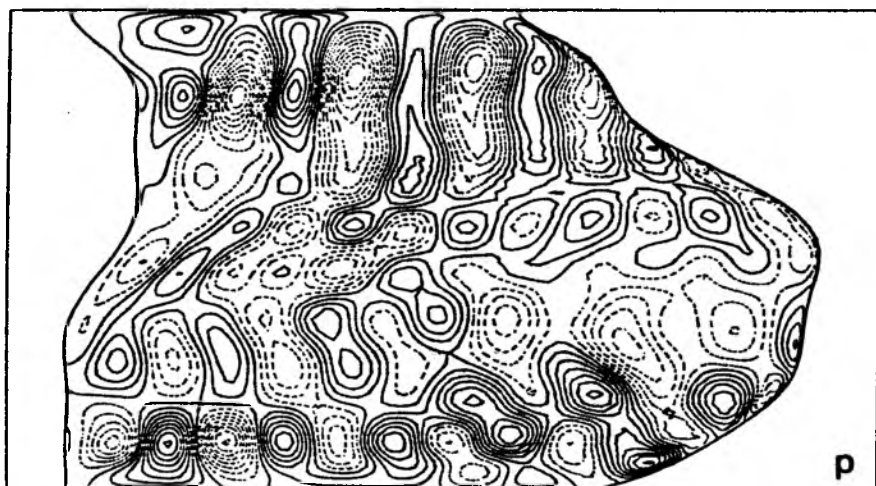
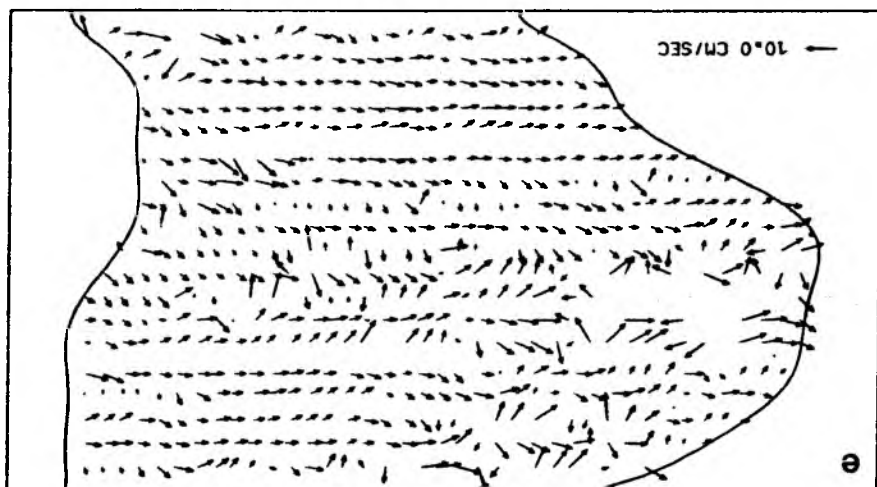
b) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_0$

c) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_3$

d) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_0$

Linienabstand jeweils  $100 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \text{sec}^{-2}$

e) Lokale Phasengeschwindigkeiten des baroklinen Druckfeldes  
(Geschwindigkeiten größer  $10 \text{ cm/sec}$  sind ausgeblendet)





Wellenlänge ist im gesamten Becken etwas größer als 1000 km, die Phasenausbreitung erfolgt mit 3 - 5 cm/sec vorwiegend nach Westen. Hier bildet die Region vor der nordafrikanischen Küste um 25°N eine Ausnahme mit nordwestlicher Phasenausbreitung, d.h. senkrecht zur Küste. Schließlich zeigen Abb.III.5c und d, daß die Wellenzüge im Süden und Norden von einem räumlich nahezu konstanten Druckfeld überlagert werden.

Diese Ergebnisse lassen sich wie folgt interpretieren: Da die Wellenlänge mit 1000 km erheblich größer ist als  $2\pi \cdot R_e = 249$  km, werden die baroklinen Wellen weitgehend dispersionsfrei sein. Dafür lautet die beschreibende Gleichung (ohne Reibung):

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t} + R_e^2 / \beta_0 \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{z_0(0)}{z_0 H_0} w_E$$

Für eine zonal konstante Verteilung von  $w_E$  . d.h.

$$\frac{z_0(0)}{z_0 H_0} w_E = \tilde{w}_0(y) \cdot \cos \omega t \quad , \quad \omega = 2\pi / \text{Jahr}$$

enthält die Lösung  $p_1$  zwei Anteile  $\tilde{p}$  und  $\hat{p}$  mit

$$-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} = \tilde{w}_0 \cos \omega t \quad , \quad -\frac{\partial \hat{p}}{\partial t} + R_e^2 / \beta_0 \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} = 0 \quad , \quad p_1 = \tilde{p} + \hat{p}$$

Dabei beschreibt  $\tilde{p}$  ein zonal ebenfalls konstantes Feld

$$\tilde{p} = -\frac{\tilde{w}_0}{\omega} \sin \omega t \quad ,$$

das eine Phasenverzögerung von einer Viertelperiode gegenüber  $w_E$  aufweist. So äußern sich die negativen Werte von  $w_E$  , die in Abb.III.5a zu der positiven barotropen Druckzelle im Nordwesten führen, drei Monate später an der gleichen Stelle als positiver Mittelwert der baroklinen Lösung, um den die Wellen oszillieren (Abb.III.5d).

$\hat{p}$  dagegen beschreibt eine fortschreitende Welle

$$\hat{p} = f(\omega - \kappa x, y) \quad , \quad \kappa = -\frac{\omega}{\beta_0 R_e^2} = \text{const.}$$

Für die hier verwendeten Parameter ergibt sich daraus eine Ost-West-Wellenlänge von 1010 km sowie eine Phasengeschwindigkeit von 3,25 cm/sec westwärts, was in sehr guter Übereinstimmung mit den Modell-Ergebnissen steht. Die teilweise erheblich höheren lokalen Phasengeschwindigkeiten in Abb.III.5e ergeben sich aus den sehr großen Phasengeschwindigkeiten der Antriebsfunktion, die bei schwacher Wellenaktivität in dieser Darstellung dominieren.

Die Randbedingung  $P_1 = 0$  an der östlichen Berandung, die durch  $x = g(y)$  gegeben sei, erfordert dann

$$f(\omega t - \alpha x, y) = \frac{\tilde{w}_0}{\omega} \cdot \sin \omega t \quad \text{für } x = g(y)$$

Nimmt man weiter an, daß auch die  $y$ -Abhängigkeit von  $\hat{p}$  durch eine fortschreitende Welle beschrieben werden kann, so folgt

$$f(\omega t - \alpha g(y) - \gamma y) = \frac{\tilde{w}_0}{\omega} \sin \omega t$$

Dies ergibt schließlich einen lokalen Wellenzahlenvektor

$$(\alpha, \gamma(y)) = \left( \alpha, -\alpha \frac{dg}{dy} \right)$$

der stets normal zur Küste gerichtet ist, sowie als Gesamtlösung

$$p_1 = \frac{\tilde{w}_0(y)}{\omega} \cdot \left( \sin(\omega t - \alpha x - \gamma(y) \cdot y) - \sin \omega t \right)$$

Die meridionalen Amplitudenstruktur des Wellenfeldes ist in diesem Fall also alleine durch  $w_E$  bestimmt. Daraus ergibt sich auch die gleiche breitenabhängige Gliederung für die barotrope und die barokline Lösung.

Wegen der sehr schematischen Konfiguration des Modells von KRAUSS und WÜBBER (1982a) (im folgenden KW genannt) ist ein Vergleich der Ergebnisse nur bedingt möglich. Die Unterschiede in den berechneten Wellenlängen resultieren aus den verschiedenen Bezugsbreiten und mittleren Schichtungen und sind nicht prinzipieller Art. Weiterhin zeigen die vorliegenden

Ergebnisse, daß die Richtung der Phaseausbreitung des baroklinen Wellenfeldes wesentlich stärker von der Form des östlichen Randes abhängt als von der sehr speziellen  $\beta$ -Ebenen-Approximation, die bei KW für die geringe nordwärtige Komponente der Phasengeschwindigkeit verantwortlich ist. Beiden Modellen ist gemeinsam, daß barokline Rossby-Wellen nur am Ostrand erzeugt werden, da die großen räumlichen Skalen der Windfelder zu keiner resonanten Anregung im Inneren des Beckens führen. Gleichzeitig finden sich längs der östlichen Ränder aber auch die größten Differenzen in den Modellergebnissen. So fehlt der bei KW erzeugte barokline Randstrom mit Maximalgeschwindigkeiten von 19 cm/sec an der Oberfläche hier völlig. Ursache dieses Randstromes sind die küstennormalen Transporte in der oberen Ekman-Schicht, die im KW-Modell explizit aufgelöst wird. Wegen der meridionalen Struktur des Windfeldes werden diese Transporte jedoch weitgehend horizontal im Randstrom kompensiert und führen zu keiner nennenswerten Vertikalbewegung längs der Küste. Obwohl dies also bei KW nicht der Fall ist, ergibt sich daraus ein potentieller Anregungsmechanismus für barokline Wellen, der im vorliegenden quasi-geostrophischen Modell nicht beschrieben werden kann: Ein räumlich konstantes, küstenparalleles Windfeld könnte durch die induzierten Ekman-Transporte an der Küste Vertikalbewegungen erzeugen, wohingegen die zugehörige Ekman-Geschwindigkeit  $w_E$  verschwinden würde und in diesem Modell keinerlei Reaktion verursachen würde.

Auch der eigentlich für die Erzeugung der Rossby-Wellen verantwortliche Mechanismus ist in beiden Modellen durchaus unterschiedlich. Wie das oben abgeleitete analytische Modell zeigt, ist hier der Wert von  $w_E$  auf dem Ostrand maßgebend für die Amplitudenstruktur des Wellenfeldes. Im vorliegenden Fall nimmt  $w_E$  an der nordafrikanischen Küste Extremwerte von  $1-1.5 \cdot 10^{-4}$  cm/sec an, woraus sich Druckamplituden von etwa  $2 \cdot 10^3 \text{ g cm}^{-2} \text{ sec}^{-2}$  bei  $z=0$  ergeben (im südlichen Teil des Beckens). Dagegen ergibt das KW-Windfeld auf dem Rand  $w_E = 0$  sowie einen Maximalwert von  $6.3 \cdot 10^{-5} \text{ cm/sec}$ , der in einem Abstand von 845 km von der Küste angenommen wird. Diese Verteilung wäre sehr ungeeignet zur Erzeugung von Wellen mit 1000 km Wellenlänge, wohingegen die freien Wellen des KW-Modells mit 1800 km

Wellenlänge durchaus angeregt werden können, allerdings mit vergleichsweise geringen Amplituden von nur  $500 \text{ g cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}$  im Druckfeld.

Als erste Erweiterung dieses Modells sind in Abb.III.6a - c die Ergebnisse auf der  $\beta$ -Ebene bei  $25^\circ\text{N}$  unter Berücksichtigung der Topographie aus Abb.II.2 zusammengefaßt. Besonders augenfällig sind die Modifikationen der großräumigen barotropen Zirkulation. Zunächst weist die Lösung prinzipiell die gleich Phasenlage wie bei ebenem Boden auf mit einem Phasensprung von  $180^\circ$  zwischen  $30^\circ\text{N}$  und  $35^\circ\text{N}$ . Die Trennung zwischen südlicher und mittlerer Zone läßt sich jedoch nur unter dem Gesichtspunkt aufrechterhalten, daß im Süden wegen der zunehmenden Ost-West-Orientierung der Topographie deren Einfluß eine besondere Rolle spielt. Insgesamt beschränken die topographischen Effekte die barotrope Zirkulation sehr stark auf die Region westlich des Mittelatlantischen Rückens. Sie umfaßt dabei das gesamte nordamerikanische Becken und ist merklich schwächer als bei ebenem Boden. So beträgt der mittlere Randstromtransport (bezogen auf  $H_0$ ) nur noch neun Sverdrup, wovon sieben bis acht westlich des Rückens rezirkulieren. Der Einfluß der Topographie ist hier also ähnlich ausgeprägt wie in einem barotropen, stationären Modell der windgetriebenen Zirkulation (SCHULMAN und MILLER, 1970 - vergleiche auch Abschnitt II.4). Die Ursache dafür liegt, wie ANDERSON et al. (1979) und ANDERSON und CORRY (1985a) zeigen, in einer sehr unvollständigen baroklinen Kompensation der topographischen Effekte auf der Zeitskala von einem Jahr. Die Einstellung dieser Gleichgewichte erfolgt sehr viel langsamer (nach der Zeit, die barokline Rossby-Wellen benötigen um das ganze Becken zu durchqueren, d.h. etwa fünf Jahre). Daher muß die einfache Sverdrup-Balance für ebenen Boden hier erweitert werden um die topographischen Effekte, d.h. die barotrope Zirkulation genügt im Inneren des Beckens der Relation

$$\beta_0 \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{f_0}{H_0} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} \right) = \frac{f_0^2}{H_0} w_E + w$$

wobei  $w$  für die Wechselwirkungen mit der baroklinen Komponente steht. Läßt man diese zunächst außer acht, so ergeben z.B. die extremen Änderungen der Wassertiefe in Süd-Nord-Richtung beim Anstieg zum Neufundland-Schelf

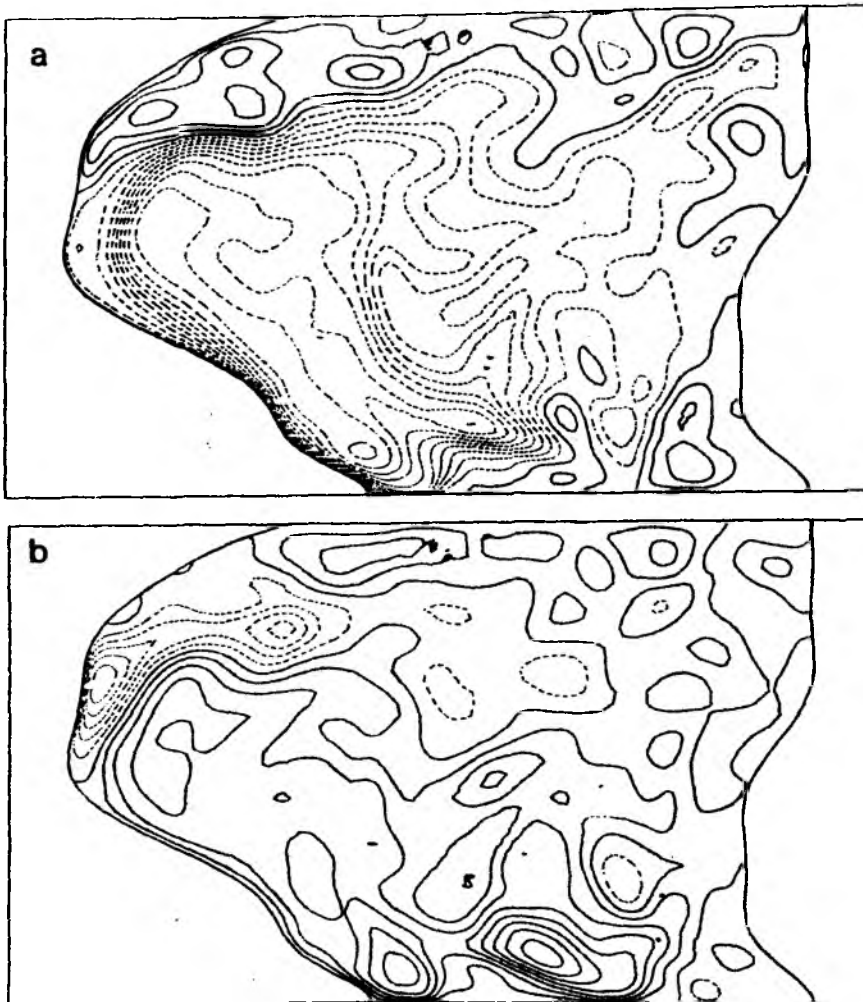


Abb. III.6 Lösung auf der  $\beta$ -Ebene mit Topographie

a) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $p_0$ ,  $t = t_3$

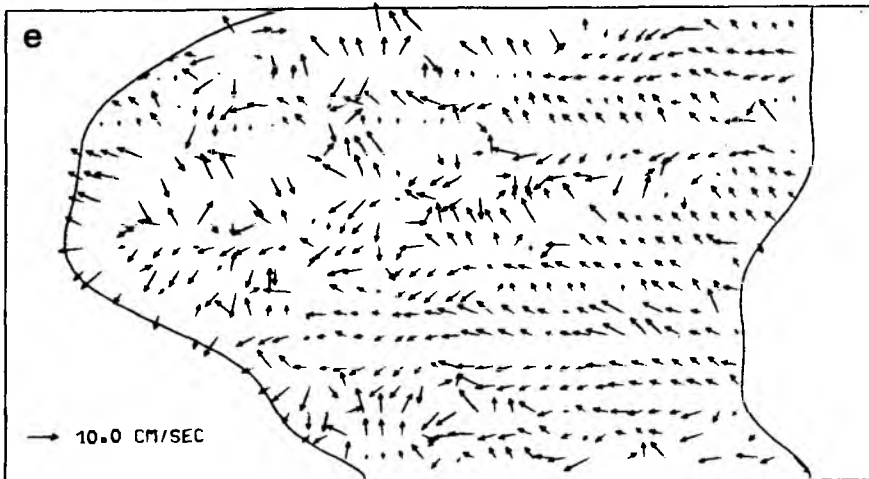
b) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $p_0$ ,  $t = t_0$

c) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $p_1$ ,  $t = t_3$

d) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $p_1$ ,  $t = t_0$

Linienabstand jeweils  $100 \text{ g cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}$

e) Lokale Phasengeschwindigkeiten des baroklinen Druckfeldes  
(Geschwindigkeiten größer  $10 \text{ cm/sec}$  sind ausgeblendet)



von 2500 m auf 650 km ein topographisches  $\beta$  von  $5,6 \cdot 10^{-13} \text{ sec}^{-1} \text{ cm}^{-1}$ , so daß das effektive  $\beta$  fast viermal so groß ist wie das planetarische der Bezugsbreite. Um diesen Faktor wird die Amplitude des barotropen Feldes geschwächt im Vergleich zum Fall mit ebenem Boden, wodurch die positive Druckzelle im Nordwesten (Abb.III.5a) fast völlig verschwindet. Der umgekehrte Effekt tritt am Südrand des Kapverden-Beckens auf. Hier kompensieren sich topographisches und planetarisches  $\beta$ , was eine Verstärkung der Hochdruckzelle am südlichen Rand bewirkt (Abb.III.6b). Im Inneren des Beckens mit einer vorwiegend in Süd-Nord-Richtung orientierten Topographie führt die obige Balance zu der bekannten Tendenz der barotropen Zirkulation, den  $f/H = \text{const.}$ -Konturen zu folgen, wobei diese Tendenz jedoch nicht nur durch das antreibende Windfeld, sondern auch durch Wechselwirkungen modifiziert werden kann.

Der Einfluß der Topographie auf die barokline Lösungskomponente ist östlich des Mittelatlantischen Rückens auffallend gering. Hier wird die Lösung wiederum beherrscht von einem Rossby-Wellen-Feld mit relativ großen Amplituden im Süden und Norden und mit einer West-Ost-Wellenlänge von etwa 1000 km, die allerdings geringfügig schwankt. Auch die lokalen Phasengeschwindigkeiten bleiben weitgehend unverändert. Dagegen ist im westlichen Atlantik nur eine äußerst schwache Wellenaktivität erkennbar, so daß hier die Lösung geprägt wird vom Gleichgewicht zwischen Auftriebsterm und der Ekman-Geschwindigkeit:

$$-\alpha_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{z_0(0)}{H_0} w_E$$

Das wesentliche Merkmal des topographischen Einflusses ist also eine sehr effektive Abschirmung der westlichen Regionen durch den Mittelatlantischen Rücken. Dies zeigt auch, daß an der Westflanke des Rückens keine Wellen erzeugt werden, weder durch das großräumige Windfeld noch durch Wechselwirkungen mit der barotropen Komponente.

Die abschirmende Wirkung des Mittelatlantischen Rückens hat natürlich erhebliche Konsequenzen für die Energieverteilung der baroklinen Rossby-Wellen im Nordatlantik. Diese sollen im folgenden näher betrachtet

werden. Die über eine Periode ( $= 1$  Jahr) und über die Bezugstiefe  $H_0$  gemittelten kinetischen und potentiellen Energien der Druckfelder  $P_0$  und  $P_1$  sind

$$E_{kin,i} = \frac{1}{2TH_0} \int_0^T \int_{-H_0}^0 \left( \frac{1}{\rho_0 f} \nabla P_i \cdot \vec{z} \cdot \frac{1}{z} \right)^2 dz dt = \frac{1}{2T} \int_0^T \left( \frac{1}{\rho_0 f} \nabla P_i \right)^2 dt, \quad i=0,1$$

$$E_{Pot} = \frac{1}{2TH_0} \int_0^T \int_{-H_0}^0 \frac{1}{N^2} \left( \frac{P_i}{\rho_0} \cdot \frac{dz}{dz} \right)^2 dz dt = \frac{\lambda_i}{2T} \int_0^T \left( \frac{P_i}{\rho_0} \right)^2 dt$$

Für  $P_i = A_i \cos(\omega t) + B_i \sin(\omega t)$  erhält man daraus

$$E_{kin,i} = \frac{1}{4f^2 \rho_0^2} \left( \left( \frac{\partial A_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_i}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial B_i}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial B_i}{\partial y} \right)^2 \right), \quad i=0,1$$

$$E_{Pot} = \frac{\lambda_i}{4 \rho_0^2} (A_i^2 + B_i^2)$$

Um einen ersten Überblick zu erhalten, sollen diese Größen zunächst für die einfache, analytische Lösung für den Fall ohne Topographie angegeben werden. Sieht man hier von der relativ großskaligen Variabilität der Lösung in Süd-Nord-Richtung bei der Berechnung der kinetischen Energien ab, so ergibt sich

$$E_{Pot} = \frac{\lambda_i \tilde{W}_0^2}{\rho_0^2 \omega^2} \sin^2 \left( \frac{\alpha x}{2} \right)$$

$$E_{kin} = \left( \frac{\alpha \tilde{W}_0}{2f \rho_0 \omega} \right)^2, \quad \alpha = - \frac{\omega}{\beta_0 R_i}$$



sowie ein Verhältnis  $E_{pot} / E_{kin}$  von

$$E_{pot} / E_{kin} = \left( \frac{L}{\pi R_A} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{L} \right) \quad , \quad L = \frac{2\pi}{\kappa}$$

Die potentielle Energie ist also räumlich moduliert mit der gleichen Wellenlänge wie die Lösung selbst. Ursache dafür ist der zonal konstante Anteil von  $\tilde{p}$  in der Lösung für  $p_1$ . Dieser Anteil trägt natürlich nicht zur kinetischen Energie des Feldes bei, so daß diese ebenfalls zonal konstant ist. Schließlich ergibt das Verhältnis der beiden Größen, daß die potentielle Energie bei einer Wellenlänge  $L = 1000$  km und einem internen Rossby-Radius  $R_A = 39,6$  km etwa sechzig mal größer ist als die kinetische Energie.

Wie LIPPERT und KÄSE (1985) zeigen, ist die Modulation der potentiellen Energie charakteristisch für ein "zero-wavenumber-forcing", d.h. für eine räumlich konstante Antriebsfunktion, die eine reine Ostrand-Erzeugung der baroklinen Wellen zur Folge hat. Damit können also resonant angeregte von randerzeugten Wellen unterschieden werden. Diese Aussage läßt sich mit der obigen analytischen Lösung für  $p_1$  erweitern auf zonal konstante Antriebsfunktionen sowie eine variable Berandung. In diesem Fall erhält man

$$E_{pot} = \frac{\rho_0 \tilde{w}_0^2(y)}{g^2 \omega^2} \cdot \sin^2 \left( \frac{\pi x + \pi(y) \cdot y}{L} \right)$$

Bei den hier berechneten Wellenlängen von 1000 km scheint also die potentielle Energie besser zur Charakterisierung des Wellenfeldes geeignet zu sein als die kinetische Energie. Es läßt sich annehmen, daß diese Merkmale der Verteilung der potentiellen Energie auch im Fall mit Bodentopographie im Prinzip erhalten bleiben, da die räumlichen Skalen des baroklinen Druckfeldes östlich des Mittelatlantischen Rückens vergleichbar sind. Daher werden in Abb.III.7a,b für beide Fälle diese Verteilungen einander gegenüber gestellt. Um den Einfluß der Wechselwirkungen zwischen

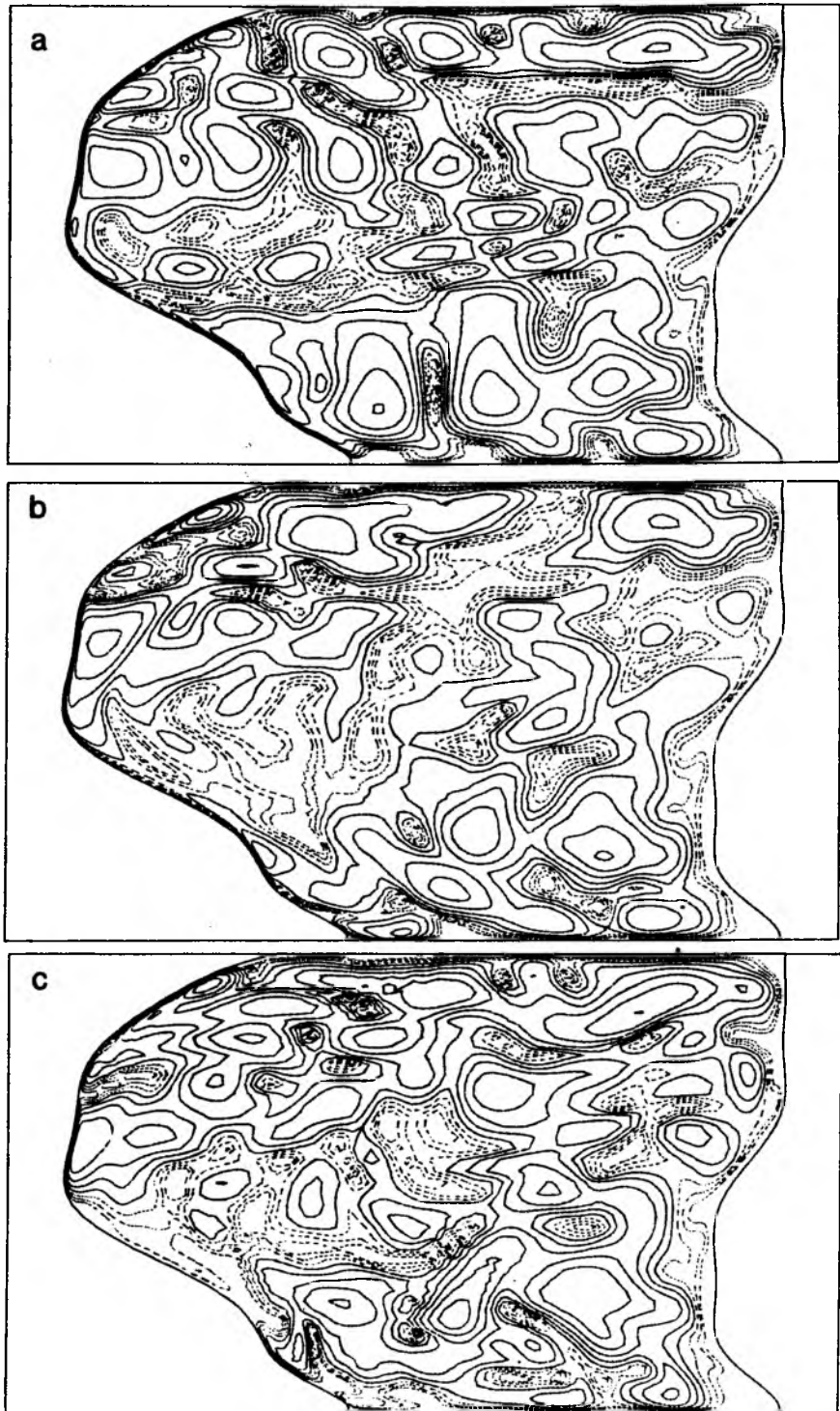


Abb. III.7  $\log_{10}(E_{Pot})$  des baroklinen Feldes  $P_1$  in  $z = -300\text{m}$   
 $E_{Pot}$  in  $\text{cm}^2/\text{sec}^2$ , Linienabstand 0,25  
a)  $\beta$ -Ebene  $25^\circ\text{N}$  mit ebenem Boden  
b)  $\beta$ -Ebene  $25^\circ\text{N}$  mit Topographie  
c) wie b), jedoch ohne Wechselwirkungsterme

barotroper und barokliner Komponente zu dokumentieren, wurde eine weitere Lösung auf der  $\beta$ -Ebene mit Topographie, jedoch ohne Wechselwirkungsterme (d.h.  $z_{\eta_0} = 0$  in Gleichung 1.14 und 1.15) berechnet, deren potentielle Energie in Abb.III.7c wiedergegeben ist. In allen drei Fällen sind jedoch nicht die vertikal gemittelten potentiellen Energien dargestellt, sondern die entsprechenden Werte für  $z = -300$  m. Dies ermöglicht einen direkten Vergleich mit der von EMERY (1983) aus XBT-Daten berechneten Verteilung der potentiellen Energie im Nordatlantik. Hier liegen in allen drei Fällen die Maximalwerte (im Süden und Norden) unter  $20 \text{ cm}^2/\text{sec}^2$  und ergeben somit höchstens 20% der von EMERY (1983) ermittelten Werte. Diese zu geringen Energien sind typisch für ein Modell, das mit einem deterministischen Windfeld betrieben wird, dessen große räumliche Skalen zu keiner resonant erzeugten Variabilität im Inneren des Beckens führen. Eine annähernde Übereinstimmung mit der beobachteten Energieverteilung läßt sich nur mit stochastischen Modellen erzielen (LIPPERT, 1986, MÜLLER und FRANKIGNOUL, 1981).

Abb.III.7a bestätigt in sehr eindeutiger Weise die durch die analytische Lösung beschriebene Energieverteilung und damit die Annahme, daß die in der numerischen Lösung enthaltenen baroklinen Rossby-Wellen ausschließlich am Ostrand erzeugt werden. Dies gilt auch für die beiden Fälle mit Topographie. Ebenso deutlich zeigt Abb.III.7b ein durchgehendes Minimum der potentiellen Energie an der Westflanke des Mittelatlantischen Rückens. Abb.III.7c dagegen weist trotz der Modifikationen durch die Topographie die gleichen prinzipiellen Merkmale auf wie der Fall mit ebenem Boden, insbesondere eine deutlich erkennbare Wellenaktivität im westlichen Atlantik, wenn auch mit geringer Energie.

Die den Ausgangsgleichungen 1.14 und 1.15 entsprechenden vollständigen Erhaltungsgleichungen der vertikal gemittelten Gesamtenergien der Druckfelder  $P_0$  und  $P_1$  lauten (siehe PEDLOSKY, 1979):

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_i}{\partial t} &= \frac{1}{s_0^2 f_0^2} \nabla \cdot (P_i \nabla \frac{\partial P_i}{\partial t}) - \frac{\beta}{2 s_0^2 f_0^2} \frac{\partial P_i^2}{\partial x} - \frac{z_{ii}}{2 s_0^2 f_0} J(P_i^2, b) \\ &= P_i \cdot \left( \frac{R_i}{s_0^2 f_0^2} \nabla^2 P_i + \frac{z_{i0}}{s_0^2 f_0} J(P_j, b) - \frac{z_{i(0)}}{s_0 H_0} W_E \right), \quad \begin{matrix} i=0,1 \\ j=1,0 \end{matrix} \end{aligned}$$

mit

$$E_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f_0 s_0} \nabla P_0 \right)^2, \quad E_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f_0 s_0} \nabla P_1 \right)^2 + \frac{\lambda_1}{2 s_0^2} P_1^2$$

Für die für  $W_E = A_W \cos \omega t + B_W \sin \omega t$  periodischen Lösungen  $P_i = A_i \cos \omega t + B_i \sin \omega t$ ,  $i=0,1$ , ergibt sich daraus durch zeitliche Mittelung über eine Periode ein lokales Gleichgewicht der Form

$$\begin{aligned} \omega (A_i \nabla^2 B_i - B_i \nabla^2 A_i) + \frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial x} (A_i^2 + B_i^2) + \frac{z_{ii}}{2} f_0 J(A_i^2 + B_i^2, b) \\ = -R_i (A_i \nabla^2 A_i + B_i \nabla^2 B_i) - z_{i0} f_0 (A_i J(A_j, b) + B_i J(B_j, b)) \\ + \frac{z_{i(0)}}{H_0} (A_i A_W + B_i B_W), \quad i=0,1, \quad j=1,0 \end{aligned}$$

In allen drei bisher diskutierten Fällen erwies sich der aus der relativen Vorticity resultierende erste Term der linken Seite als sehr klein im Verhältnis zu den übrigen Komponenten, was für die barokline Lösung anzeigt, daß es sich um weitgehend dispersionsfreie Wellen handelt. Die beiden anderen Terme der linken Seite lassen sich für die barokline Lösung  $P_1$  in sehr guter Näherung zusammenfassen zu

$$\frac{\beta}{2} \frac{\partial}{\partial x} (A_1^2 + B_1^2) + \frac{z_{10} f_0}{2} J(A_1^2 + B_1^2, b) = \frac{z_{10} H_1 s_0^2}{\lambda_1} J(E_{pot}, f/H_1)$$

mit  $H_1 = H_0 - z_1^2 / (-H_0) \cdot b$  und  $f = f_0 + \beta y$ .

Dies zeigt, daß für eine freie, nichtdispersive Rossby-Welle ohne Wechselwirkungen mit dem barotropen Feld die potentielle Energie längs der Linien  $f/H_1 = \text{const.}$  erhalten bleibt, wobei  $H_1$  eine um den Faktor  $\bar{z}_1^2(-H_0) = 0.26$  reduzierte Topographie beschreibt. Diese Linien sind in Abb.III.8 dargestellt. Daraus ergeben sich nur geringe Abweichungen gegenüber der rein zonalen Energieausbreitung im Fall ohne Topographie. Nur im Norden mit den höchsten Erhebungen des Mittelatlantischen Rückens werden diese Abweichungen groß. Wie ein Vergleich mit Abb.III.7c zeigt, wird diese Form der Energieausbreitung vom numerischen Modell im Fall ohne Wechselwirkungen recht gut wiedergegeben, wogegen diese Tendenz bei Berücksichtigung der Wechselwirkungen nicht zu erkennen ist (Abb.III.7b).

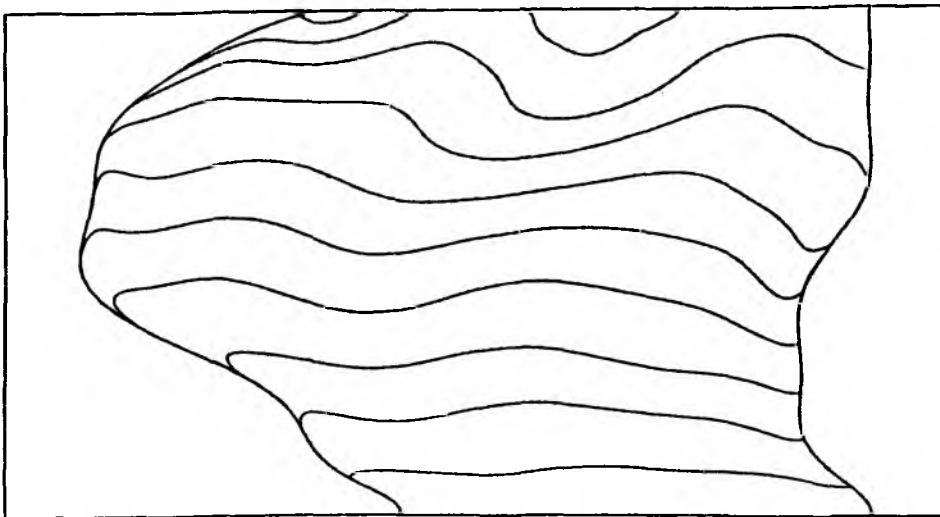


Abb. III.8  $f/H_1 = \text{const.}$ -Linien der reduzierten Topographie  $H_1 = H_0 - \bar{z}_1^2(-H_0) \cdot b$

Schließlich sind in Abb.III.9a,b die Ergebnisse der Rechnung ohne Wechselwirkungen für das barokline Feld  $P_1$  dargestellt. Neben den eben beschriebenen charakteristischen Merkmalen zeigt diese Lösung zwei zusätzliche Effekte, die durch die Möglichkeit zur Wechselwirkung mit der barotropen Komponente verhindert werden. Dies sind zum einen deutlich

kürzere Wellenlängen (900 km im Süden) und zum anderen Reflexionen an der Topographie, die sich hier in sehr kurzwelligen Störungen an der Ostflanke des Rückens und besonders ausgeprägt längs des Neufundland-Schelfs äußern. Beide Effekte erklären die niedrigeren Amplituden der Wellen im Ostteil des Atlantiks, da beide - insbesondere aber die kurzen reflektierten Wellen - zu einem erhöhten Energieverlust durch Dissipation führen.

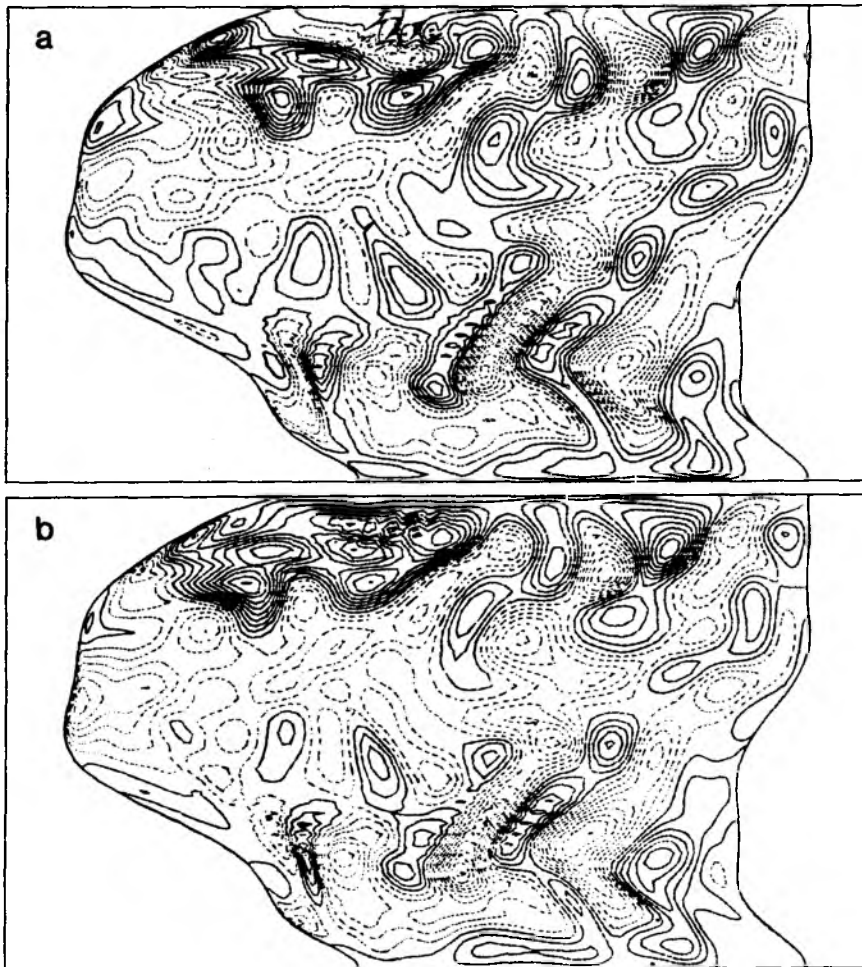


Abb. III.9 Lösung auf der  $\beta$ -Ebene mit Topographie (ohne Wechselwirkungen)  
a) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $p_1$ ,  $t = t_3$   
b) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $p_1$ ,  $t = t_0$   
Linienabstand jeweils 100  $g \cdot cm \cdot sec^{-2}$

Die Einflüsse der Topographie und der topographischen Wechselwirkungen lassen sich also wie folgt zusammenfassen:

Infolge der Wechselwirkungen über dem Mittelatlantischen Rücken kommt es zu einer weitgehenden Teilung des Atlantik in zwei sehr unterschiedliche Regionen. Während der westliche Atlantik dominiert wird von der barotropen Zirkulation mit einem durch die Topographie reduzierten Randstromtransport, wird der östliche Atlantik beherrscht von baroklinen Rossby-Wellen, deren Ausbreitungseigenschaften und Wellenlängen durch die Topographie nur in sehr geringem Maße beeinflußt werden. Insgesamt scheinen die direkten Auswirkungen der Topographie, d.h. Reflexion und Transformation zu kürzeren Wellenlängen, durch die Wechselwirkungen mit der barotropen Komponente erheblich geschwächt zu werden.

Diese Ergebnisse lassen sich nicht mit bestehenden Theorien vergleichen, da die dazu notwendigen Voraussetzungen wie konstante Bodenneigung (SUGINOHARA, 1981) oder zumindest eine gegenüber den Wellenlängen großskalige Topographie (McWILLIAMS, 1976) hier auch nicht annähernd erfüllt sind. Auch mit den Rossby-Wellen-Analysen historischer Daten durch PRICE und MAGAARD (1986) läßt sich eine Übereinstimmung nur insoweit feststellen, als daß die Topographie des Mittelatlantischen Rückens einen merklichen Einfluß auf die Verteilung der potentiellen Energie der baroklinen Wellen zu haben scheint. Das von ihnen beobachtete Maximum auf der Westflanke des Rückens kann aber in den vorliegenden Ergebnissen auf der  $\beta$ -Ebene nicht verifiziert werden.

Zum Abschluß werden in einer Erweiterung des  $\beta$ -Ebenen-Modells die entsprechenden Lösungen unter Berücksichtigung der Kugelgeometrie vorgestellt. Abb.III.10 zeigt die Ergebnisse für ebenen Boden. Auch hier steht das barotrope Druckfeld im Sverdrup-Gleichgewicht mit der antreibenden Ekman-Geschwindigkeit. Durch die Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters ergeben sich jedoch gegenüber der  $\beta$ -Ebenen-Lösung eine Erhöhung der Amplituden nördlich von  $25^\circ\text{N}$  und eine Abschwächung südlich davon. Der Transport im westlichen Randstrom bei  $30^\circ\text{N}$  bleibt mit 13 Sverdrup erhalten.

Die barokline Lösung dagegen weist eine völlig andere Struktur auf. Die Wellenaktivität ist jetzt beschränkt auf die Region südlich einer Linie, die ausgehend vom Ostrand bei 45°N in südwestlicher Richtung verläuft und den Westrand bei etwa 20°N erreicht. Nördlich davon ist die barokline Reaktion wiederum gegeben durch das Gleichgewicht zwischen  $w_E$  und dem Auftriebsterm. Das barokline Wellenfeld im südöstlichen Teil des Beckens ist gekennzeichnet durch eine von Norden nach Süden stark zunehmende West-Ost-Wellenlänge, die bei 10°N größer wird als die Breite des Beckens. Damit einher geht eine Drehung des Vektors der Phasengeschwindigkeit von nordwestlichen zu nördlichen Richtungen verbunden mit einer Zunahme der Phasengeschwindigkeit bis auf 10 cm/sec südlich von 10°N (Abb.III.10e). Dies Verhalten beruht auf der Breitenabhängigkeit der Ausbreitungseigenschaften freier Rossby-Wellen infolge der Variationen des internen Rossby-Radius

$$R_i = (f^2 \lambda_1)^{-\frac{1}{2}}$$

mit dem Coriolisparameter  $f = 2\Omega \sin\varphi$ . Diese sogenannte " $\beta$ -Dispersion" wird ausführlich von SCHOPF et al. (1980) beschrieben. Eine anschauliche Erklärung läßt sich wie folgt geben:

Betrachtet man  $f$  und  $\beta$  als gegenüber den baroklinen Wellen nur sehr langsam mit der geographischen Breite  $\varphi$  variierende Größen, so lassen sich die Ausbreitungseigenschaften eines Wellenzuges näherungsweise auf einer Folge lokaler  $\beta$ -Ebenen beschreiben. Dort genügen freie Wellen der Form  $p_1 = \tilde{p} \cdot \cos(\omega t - \alpha x - \gamma y)$  der normalen  $\beta$ -Ebenen-Dispersionsrelation

$$\omega = \frac{-\alpha\beta}{\alpha^2 + \gamma^2 + f^2 \lambda_1}$$

Daraus resultiert als Ortskurve der möglichen Wellenzahlenvektoren  $(\alpha, \gamma)$  für gegebenes  $\omega$  und  $\lambda_1$  ein Kreis mit

$$\left(\alpha + \frac{\beta}{2\omega}\right)^2 + \gamma^2 = \left(\frac{\beta}{2\omega}\right)^2 - f^2 \lambda_1$$



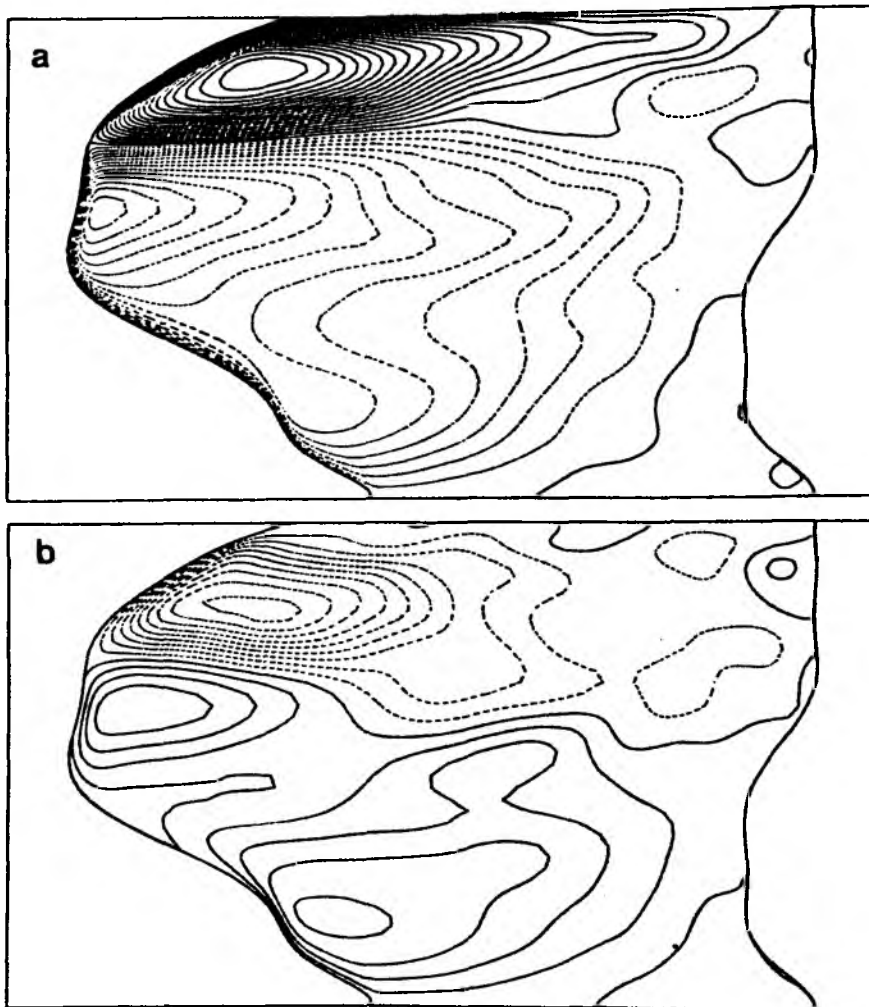


Abb.III.10 Lösung auf der Kugel ohne Topographie

a) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_3$

b) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_0$

c) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_3$

d) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_0$

Linienabstand jeweils  $100 \text{ g cm}^{-1} \text{ sec}^2$

e) Lokale Phasengeschwindigkeiten des baroklinen Druckfeldes  
(Geschwindigkeiten größer  $10 \text{ cm/sec}$  sind ausgeblendet)

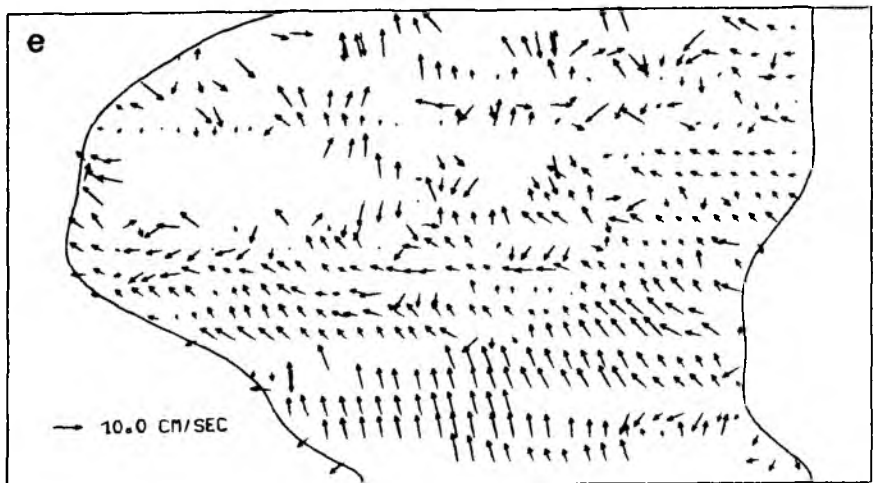
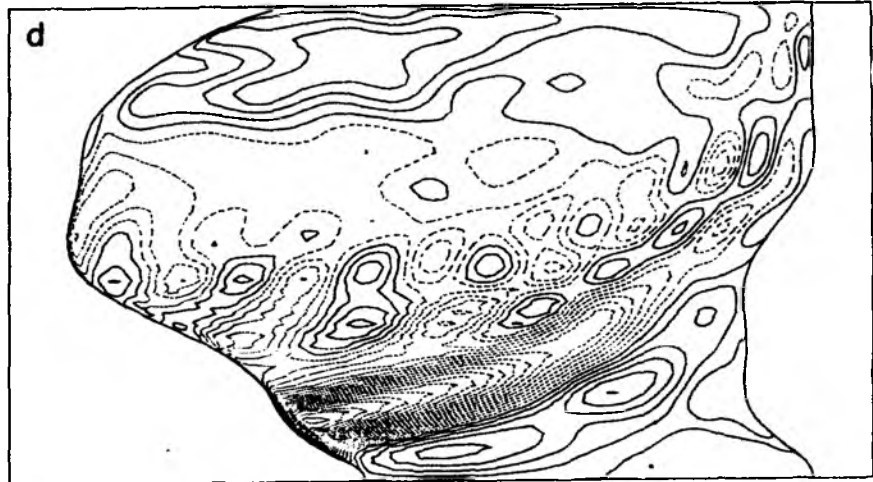


Abb.III.11 zeigt für die Parameter des Modells, d.h.  $\omega = 2\pi/\text{Jahr}$  und  $\lambda_1 = 1.68 \cdot 10^5 \text{ sec}^2 \text{ cm}^{-2}$ , eine solche Folge von Ortskurven mit den Wellenzahlenvektoren längs des südlichen Wellenzuges aus Abb.III.10d sowie die zugehörigen lokalen Richtungen der Gruppengeschwindigkeit.

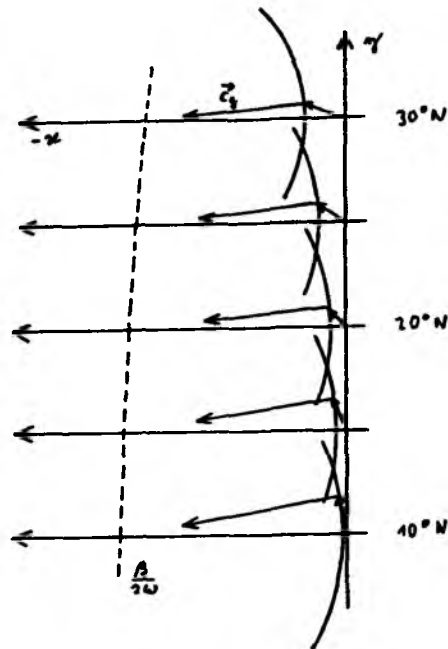


Abb.III.11 Prinzipdiagramm zur  $\beta$ -Dispersion

Hat nun der Wellenzug an seinem Ausgangspunkt am Ostrand eine positive Süd-Nord-Wellenzahl  $\gamma$ , wie es auch im  $\beta$ -Ebenen-Modell zwischen  $20^\circ\text{N}$  und  $30^\circ\text{N}$  der Fall ist (Abb.III.5e), so folgt daraus eine geringe südwärtsige Komponente der Gruppengeschwindigkeit. Da aber die westwärtsige Komponente der Phasengeschwindigkeit  $c_x$  mit

$$c_x = \frac{-\beta}{x^2 + \gamma^2 + f^2 \lambda_1}$$

nach Süden hin größer wird, orientiert sich der ursprünglich küstenparallele Wellenzug mehr in West-Ost-Richtung, so daß sich  $\gamma$  im

Laufe der Phasenpropagation weiter vergrößert - woraus eine Zunahme der südwardigen Komponente der Gruppengeschwindigkeit resultiert. Bei  $10^{\circ}\text{N}$  stehen schließlich Phasengeschwindigkeit und Gruppengeschwindigkeit senkrecht zueinander. Insgesamt erfolgt also die Energieausbreitung längs einer Linie, die sich mit zunehmendem Abstand vom Ostrand nach Südwesten neigt. Diese Charakteristiken der freien Rossby-Wellen mit Jahresperiode wurden von SCHOPF et al.(1980) für den gesamten Weltozean berechnet. Daran gemessen erscheinen die sich aus Abb.III.11 bezüglich der Energieausbreitung ergebenden Tendenzen ausgesprochen gering. Die Stärke des Effektes der  $\beta$ -Dispersion hängt aber von der Größe der Zunahme von  $C_K$  nach Süden ab, also im Wesentlichen von der Variation des internen Rossby-Radius  $R_d$  mit  $\varphi$ . Diese wird außer durch den Coriolisparameter auch durch den baroklinen Eigenwert  $\lambda_1$  bestimmt, der bei SCHOPF et al. (1980) mit  $1,02 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^2 \cdot \text{cm}^{-2}$  für nordatlantische Verhältnisse erheblich zu klein ist (vergleiche Tabelle I.1), wodurch die  $\beta$ -Dispersion besonders in höheren Breiten verstärkt wird. Die hier im Modell beobachtete geringe  $\beta$ -Dispersion erklärt auch die prinzipielle Ähnlichkeit des Wellenfeldes aus Abb.III.10c,d mit den Ergebnissen auf der  $\beta$ -Ebene (Abb.III.5c,d) im Bereich von  $20^{\circ}\text{N}$  bis  $30^{\circ}\text{N}$ . Südlich davon wird durch die schnellere Variation des Coriolisparameters mit  $\varphi$  auch für den hier verwendeten baroklinen Eigenwert  $\lambda_1 = 1,68 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^2 \cdot \text{cm}^{-2}$  der Effekt der  $\beta$ -Dispersion groß. Legt man wiederum die Ortskurven aus Abb.III.11 zugrunde, so ergibt sich eine südwestliche Gruppengeschwindigkeit von etwa 16 cm/sec, d.h. ein am Ostrand erzeugtes baroklines Signal erreicht in diesen Breiten schon nach 1,5 Jahren den Westrand. Daher verliert die ausgeprägte Druckzelle im Süden des Beckens trotz der sehr hohen nordwardigen Phasengeschwindigkeiten ihren Charakter als fortschreitende Welle und verlagert sich im Laufe einer Periode nur wenig. Sie entspricht also eher einer im Sverdrup-Gleichgewicht stehenden Zirkulation, die im Westen, bedingt durch die geringe barokline Reibung, durch einen sehr intensiven Randstrom geschlossen wird. Auch in diesem Fall ist keine resonant erzeugte Wellenaktivität zu beobachten - was nicht verwundert, da die Skalen der freien Rossby-Wellen außer im südlichen Teil des Beckens eher kleiner geworden sind.

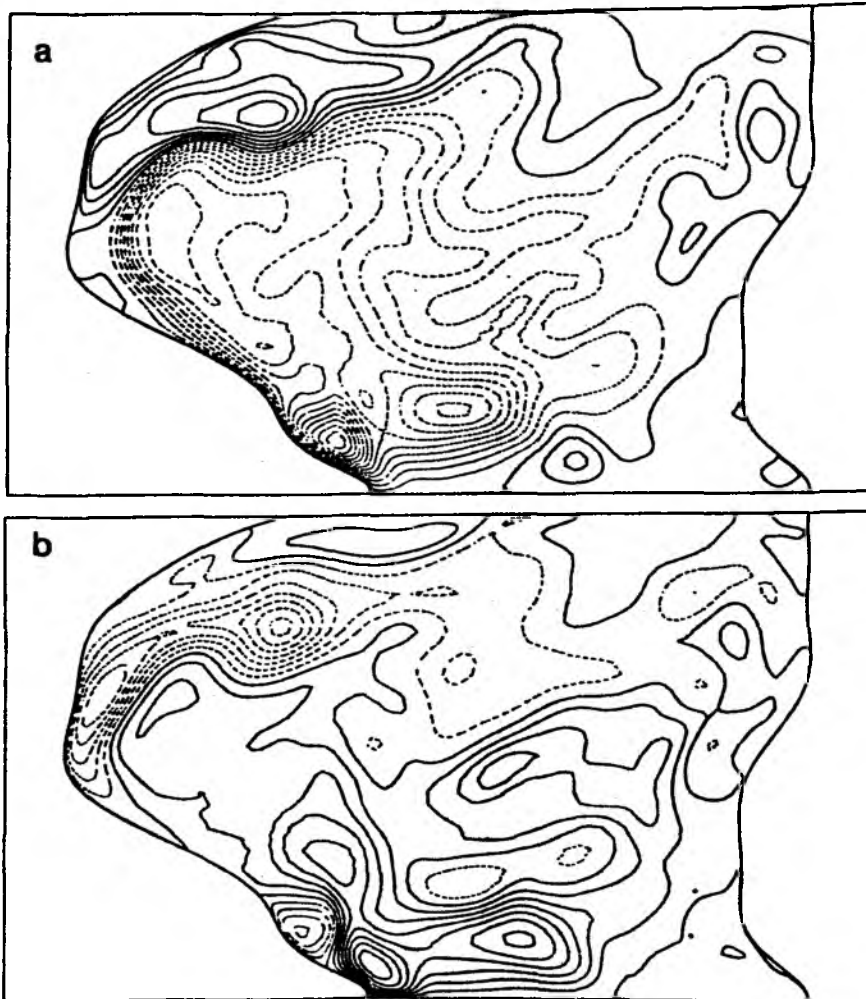
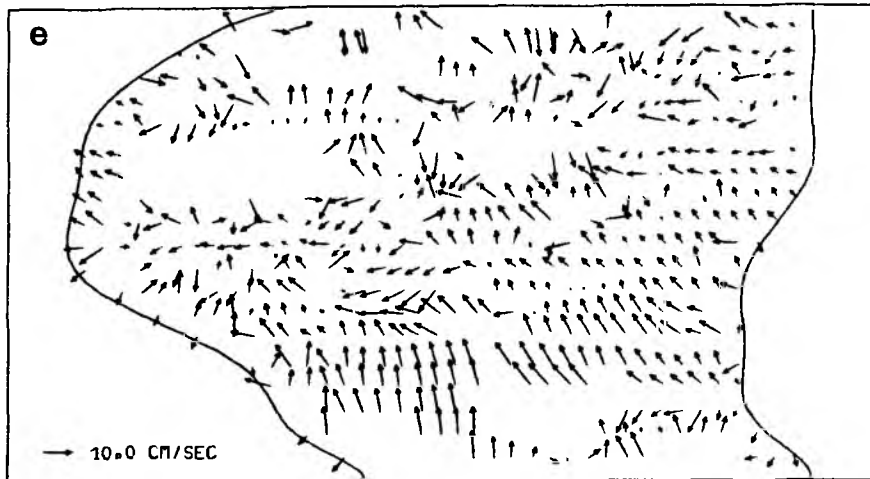


Abb.III.12 Lösung auf der Kugel mit Topographie

- a) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_3$
- b) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_0$
- c) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_3$
- d) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_0$

Linienabstand jeweils  $100 \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}$

- e) Lokale Phasengeschwindigkeiten des baroklinen Druckfeldes  
(Geschwindigkeiten größer  $10 \text{ cm/sec}$  sind ausgeblendet)



Insgesamt stehen diese Ergebnisse aber in guter Übereinstimmung mit denen von ANDERSON und CORRY (1985a), zeigen aber auch, wie empfindlich Modelle, die auf der Annahme einer mittleren Dichteschichtung basieren, von der Wahl der Schichtungsparameter abhängen.

Abschließend wird die Lösung auf der Kugel mit der Modelltopographie aus Abb.III.2 behandelt, deren Ergebnisse in Abb.III.12 zusammengefaßt sind. Auch hier sind die Unterschiede für die barotrope Komponente gegenüber der entsprechenden Lösung auf der  $\beta$ -Ebene (Abb.III.6a,b) gering und äußern sich vornehmlich in einer Amplitudenerhöhung nördlich von 25°N sowie der entsprechenden Reduzierung südlich davon. Außerdem zeigt insbesondere das Januar-Bild (Abb.III.12b) eine wesentlich glattere Struktur im nordöstlichen Atlantik, was auf die auch hier fehlende Rossby-Wellen-Aktivität in diesem Bereich zurückzuführen ist. Der Randstromtransport im westlichen Randstrom bei 30°N ist mit 8,5 Sverdrup nur unwesentlich schwächer als auf der  $\beta$ -Ebene. Neu dagegen ist eine sehr kleinräumige und intensive Zirkulationszelle am westlichen Rand bei 10°N, die ihre Entstehung den topographischen Wechselwirkungen mit der baroklinen Komponente verdankt, die in diesem Bereich ebenfalls einen sehr intensiven Randstromcharakter besitzt. Ein Vergleich mit den Ergebnissen von ANDERSON und CORRY (1985b) ist auch in diesem Fall nur bedingt möglich, da hier zur Anregung nur die zeitliche Fourier-Komponente des Windfeldes mit Jahresperiode verwendet wird. Trotzdem werden alle charakteristischen Merkmale der barotropen Zirkulation von ANDERSON und CORRY (1985b) auch mit dem vorliegenden Modell reproduziert, jedoch mit streckenweise erheblichen Differenzen in Amplitude und Phase. Diese Unterschiede lassen sich sicherlich zum Teil durch die Beschränkung auf eine Fourier-Komponente des Windfeldes erklären. Es erhebt sich aber die Frage, ob die Formulierung des Modells in vertikalen Eigenfunktionen geeignet ist, den ausgesprochenen Randstromcharakter der barotropen Zirkulation in Anwesenheit starker topographischer Variationen am amerikanischen Schelfrand ausreichend zu beschreiben. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit auf eine detaillierte Untersuchung der Randstrombereiche sowie der Randstromtransporte verzichtet.

Die barokline Komponente unterliegt hinsichtlich der Rossby-Wellen-Aktivität den gleichen Beschränkungen wie im Fall ohne Topographie, d.h. sie verschwindet nördlich der oben bezeichneten Linie. In dieser Region sind beide Lösungen praktisch identisch. Geht man davon aus, daß die prinzipiellen Auswirkungen der Topographie auf das barokline Wellenfeld die gleichen sind wie auf der  $\beta$ -Ebene, so verwundert es nicht, daß auch hier die Unterschiede im östlichen Atlantik im Vergleich zum Fall mit ebenem Boden gering sind. Diese Tendenz verstärkt sich zum Südrand des Beckens hin, da alle Topographie-Terme in den Gleichungen 1.14 und 1.15 gewichtet sind mit dem Coriolisparameter  $f$ , so daß sie gegenüber den planetarischen  $\beta$ -Termen an Bedeutung verlieren. Dies führt auch zu einer im Vergleich zur  $\beta$ -Ebenen-Lösung sehr viel besser zu erkennenden Wellenaktivität im Westatlantik. Dies spiegelt sich in der Verteilung der potentiellen Energie des baroklinen Druckfeldes  $P_1$  wieder, die in Abb.III.13 dargestellt ist. Neben der charakteristischen Modulation durch die Ostranderzeugung, die im Ostatlantik vorherrschend ist, ist eine deutliche Zunahme der potentiellen Energie an der Westflanke des Mittelatlantischen Rückens nördlich von  $15^\circ\text{N}$  zu erkennen. Auch hierbei handelt es sich nicht um ein Maximum der räumlichen Verteilung, wie von PRICE und MAGAARD (1986)



Abb.III.13  $\text{Log}_{10}(E_{\text{pot}})$  des baroklinen Feldes  $P_1$  in  $z = 300\text{m}$   
 $E_{\text{pot}}$  in  $\text{cm}^2/\text{sec}^2$ , Linienabstand 0,25  
(Lösung auf der Kugel mit Topographie)



beobachtet. Dies kann jedoch auch nicht erwartet werden, da die möglichen Energiebeiträge einer resonanten Anregung im Inneren des Beckens fehlen, so daß ein Maximum der potentiellen Energie stets im Entstehungsgebiet der hier beschriebenen baroklinen Wellen, also am Ostrand, zu erwarten ist. In Abb.III.13 liegt das absolute Maximum der potentiellen Energie nicht am Ostrand, sondern im Südwesten. Die zugehörige barokline Druckzelle ist jedoch aus den oben angeführten Gründen nicht als freie Rossby-Welle anzusehen. Die maximalen Werte der potentiellen Energie sind in diesem Fall mit etwa  $60 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$  größer als auf der  $\beta$ -Ebene und kommen damit den von EMERY (1983) angegebenen Werten erheblich näher.

Ein Vergleich mit den Ergebnissen des ebenfalls in Kugelkoordinaten formulierten Modells von CUMMINS et al. (1986) ist nicht ohne weiteres möglich. So setzt die dort verwendete vereinfachte Beschreibung mit einer Schicht und reduzierter Schwerkraft im Prinzip eine vollständige Kompensation von barotroper und barokliner Komponente in der vernachlässigten unteren Schicht voraus, die hier in den Abbildungen III.10 und III.12 nicht zu erkennen ist. Diese Näherung erscheint also für nordatlantische Verhältnisse zumindest auf der Zeitskala von einem Jahr nicht gerechtfertigt. Weiterhin liegt zum einen das Modell-Gebiet von CUMMINS et al. in höheren geographischen Breiten, zum anderen wird dort eine mittlere Schichtung verwendet, der ein relativ kleiner barokliner Eigenwert von  $\lambda_2 = 1,11 \cdot 10^{-5} \text{ sec}^2 \text{ cm}^{-2}$  entspricht. Beides führt, wie oben erläutert, zu einer Verstärkung der  $\beta$ -Disperion, die in den Ergebnissen von CUMMINS et al. sehr viel deutlicher zu erkennen ist als in den Abbildungen III.10 und III.12. Diese Tendenz wird unterstützt vom unterschiedlichen Verlauf der östlichen Berandung im Nordpazifik und Nordatlantik, die hier schon auf der  $\beta$ -Ebene zu einer vornehmlich nordwestlichen Ausrichtung der Phasengeschwindigkeit im Entstehungsgebiet der baroklinen Rossby-Wellen führt (vergleiche Abb.III.5c-d), wohingegen im Nordpazifik eine südwestliche Phasenausbreitung längs des Ostrandes erzwungen wird. Die berechneten Wellenlängen sind in beiden Modellen durchaus vergleichbar, jedoch sind die kurzen Wellen im nördlichen Teil des Beckens bei CUMMINS et al. wesentlich stärker ausgeprägt als im

vorliegenden Fall. Eine naheliegende Ursache hierfür liegt in der auf den Längenskalen von 300 - 500 km erheblichen Dissipation im hier beschriebenen Modell verbunden mit der sehr geringen Gruppengeschwindigkeit in der Nähe der kritischen Breite für barokline Rossby-Wellen mit Jahresperiode (siehe Kapitel I).

Die Unterschiede in den beiden Ergebnissen lassen sich somit befriedigend erklären, machen aber noch einmal die empfindliche Abhängigkeit von der Wahl des baroklinen Eigenwertes  $\lambda$ , deutlich. Damit erhebt sich die Frage, ob die Vernachlässigung der tatsächlichen geographischen Variation dieses Parameters, wie sie z.B. bei EMERY et al. (1984) wiedergegeben ist, gerechtfertigt ist. Eine Möglichkeit zur Klärung dieser Frage besteht in einem Vergleich mit den entsprechenden Ergebnissen eines vollständigeren Modells. Dazu bieten die zur Zeit im Sonderforschungsbereich "Warmwassersphäre des Nordatlantiks" laufenden numerischen Experimente zur jahreszeitlichen Variabilität im Nordatlantik mit dem von BRYAN (1969) beschriebenen Modell eine gute Gelegenheit. Ein vorläufiger Vergleich zeigt hinsichtlich der baroklinen Rossby-Wellen eine gute prinzipielle Übereinstimmung der Resultate (R. GERDES, persönliche Mitteilung). Eine ausführliche Darstellung dieses Vergleichs würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen und soll an anderer Stelle gegeben werden.

#### IV. ZUSAMMENFASSUNG

In den vorangegangenen Kapiteln wurde ein physikalisch einfaches Modell zur Simulation windgetriebener, barokliner Rossby-Wellen mit Jahresperiode für den Nordatlantik vorgestellt. In einer Erweiterung der Arbeit von KRAUSS und WÜBBER (1982a) wurden dabei zusätzlich die Effekte der Kugelgeometrie sowie variabler Küstenlinien und Bodentopographie in einem Modellgebiet zwischen 5°N und 45°N berücksichtigt. Als Anregung diente das von ISEMER und HASSE (1986) aus dem Bunkerdatensatz gewonnene Feld der Windschubspannung. In allen hier betrachteten Fällen führte das zugehörige großskalige Feld der Windschubspannungsrotation zur ausschließlichen Anregung der baroklinen Wellen längs des Ostrandes des Beckens mit der daraus resultierenden charakteristischen räumlichen Verteilung der potentiellen Energie. Dies ist eine gemeinsame Eigenschaft aller vergleichbarer Modelle, die mit einem deterministischen Windfeld betrieben werden und ergibt, gemessen an den Beobachtungen, stets zu geringe Energiebeträge.

Die übrigen Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Der Mittelatlantische Rücken bewirkt zumindest auf der  $\beta$ -Ebene eine sehr effektive Abschirmung des Nordamerikanischen Beckens von der vom Ostrand ausgehenden Rossby-Wellen-Aktivität, so daß dort eine geschlossene barotrope Zirkulation mit einem Randstromtransport von etwa 9 Sverdrup dominiert. Dagegen wird das barokline Wellenfeld im östlichen Atlantik nur sehr wenig durch die Topographie modifiziert. Die zugehörigen Wellenlängen schwanken geringfügig um 1000 km bei einer Phasenausbreitung in vorwiegend westlicher Richtung im südlichen Teil des Beckens und nordwestlicher Richtung im Bereich um 25°N, was eine direkte Folge der Neigung der nordafrikanischen Küste ist.

Erheblich stärker sind die Auswirkungen der Kugelgeometrie, wodurch sich der interne Rossby-Radius und damit die Ausbreitungseigenschaften der Wellen mit der geographischen Breite ändern. Dies führt im Süden des Beckens zu Ost-West-Wellenlängen, die größer sind als die Beckenbreite, sowie zu sehr hohen südwestlichen Gruppengeschwindigkeiten von 16 cm/sec. Dadurch verlieren diese Wellen trotz der relativ schnellen nordwärtigen Phasenpropagation mit 10 cm/sec ihren Charakter als fortschreitende Welle. Nördlich von 25°N dagegen nehmen die Wellenlängen und Gruppengeschwindigkeiten zu höheren geographischen Breiten hin rasch ab.

Hier bewirkt die skalenselektive Reibung des Modells eine starke Dämpfung der Wellenzüge. Schließlich wird durch die Breitenabhängigkeit des Coriolisparameters die abschirmende Wirkung des Mittelatlantischen Rückens südlich von 25°N vermindert, was eine gegenüber den Lösungen auf der  $\beta$ -Ebene deutlich erhöhte Wellenaktivität im südwestlichen Teil des Beckens zur Folge hat.

Ein Vergleich mit den Arbeiten anderer Autoren ergab zwar eine prinzipielle Übereinstimmung in den wesentlichen Merkmalen der Ergebnisse, zeigt aber auch, wie kritisch diese Ergebnisse von den gewählten Parametern, insbesondere vom baroklinen Eigenwert abhängen. Dies ist sicher nur eine der Unzulänglichkeiten des hier beschriebenen Modells. So bedarf die Frage nach realistischen Randbedingungen an den südlichen und nördlichen Rändern des Modellgebiets dringend einer befriedigenden Klärung. Dies gilt besonders für die hier gewählte quasi-geostrophische Formulierung. Weiterhin scheint in Anbetracht der stark variierenden Wellenlängen auf der Kugel die verwendete Form der Dissipation nicht optimal geeignet zu sein zur Untersuchung barokliner Wellen mit Jahresperiode.

Diese Fragen können in der vorliegenden Arbeit, deren Hauptanliegen die Vorstellung eines neuen Konzeptes zur numerischen Lösung dieses und ähnlicher physikalischer Probleme ist, nicht beantwortet werden. Das Konzept hat sich in diesem einfachen Fall auch unter schwierigen numerischen Bedingungen sowohl hinsichtlich der Effizienz als auch hinsichtlich der erzielten Approximationsgüte sehr gut bewährt. Trotzdem sind hier weitere Verbesserungen möglich. So ließe sich beispielsweise auf eine spektrale Behandlung der barotropen Lösungskomponente ohne wesentliche Einbußen an der Güte der Gesamtlösung verzichten, was besonders bei topographischen Problemen zu einer merklichen Steigerung der Rechenökonomie führen würde. Ebenso läßt sich eine Reibung höherer Ordnung durch Übergang auf eine semi-implizite Diskretisierung in der Zeit, bei der die Wechselwirkungsterme zwischen den beiden Lösungskomponenten explizit behandelt werden, ohne Schwierigkeiten einführen. Schließlich scheint auch die Einbeziehung nichtlinearer Wechselwirkungen mit einer mittleren

Zirkulation durchaus möglich, da alle Komponenten des numerischen Verfahrens prinzipiell die Behandlung derartiger Probleme gestatten. Das hier vorgestellte einfache Modell ist also sowohl in physikalischer als auch in numerischer Hinsicht ausbaufähig, wodurch sicherlich eine wesentliche Verbesserung der Beschreibung der baroklinen Rossby-Wellen im Nordatlantik zu erzielen wäre. Allerdings läßt sich als abschließendes Ergebnis dieser Arbeit feststellen, daß der sehr hohe Aufwand an Entwicklungsarbeit bei der Implementierung derart komplexer numerischer Algorithmen die Erstellung eines Modells von vergleichbarer Allgemeinheit wie das von BRYAN (1969) beschriebene unmöglich macht.

## APPENDIX A

### Spektrale Auswertung der Flächenintegrale

Zur Erfüllung der Randbedingungen des zeitabhängigen Problems ist die Auswertung von Integralen der Form

$$I = \iint_{\Omega} \rho \, d\Omega$$

notwendig, wobei  $\Omega$  die Oberfläche des Modell-Ozeans ist. Hier wird nur der Fall für kartesische Koordinaten dargestellt. Die Modifikationen für Kugelkoordinaten sind offensichtlich. In der Bezeichnungsweise von Abb.II.4 gilt

$$I = \int_0^L \int_{f_1(y)}^{f_2(y)} \rho \, dx \, dy$$

und mit der zu 2.18 inversen Transformation

sowie  $x = \cos(\alpha)$  ,  $y = \cos(\eta)$  ,  $0 \leq \alpha, \eta \leq \pi$  , gilt dann

$$I = \frac{L}{4} \int_0^\pi \int_0^\pi B(\eta) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\eta) P(\alpha, \eta) \, d\alpha \, d\eta$$

Hat dann  $P(\alpha, \eta)$  eine Darstellung gemäß

$$P(\alpha, \eta) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{P}_{n,m} \cos(n\alpha) \cos(m\eta)$$

so nimmt das Integral die einfache Form

$$\begin{aligned} I &= \frac{L}{4} \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \hat{P}_{n,m} \int_0^\pi B(\eta) \sin(\eta) \cos(m\eta) \, d\eta \int_0^\pi \sin(\alpha) \cos(n\alpha) \, d\alpha \\ &= \frac{L}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ n=0 \bmod 2}}^N \frac{1}{1-n^2} \left( \sum_{m=0}^M \hat{P}_{n,m} I_m \right) \end{aligned}$$

## APPENDIX A

an, wobei gilt

$$I_m = \int_0^{\pi} B(\eta) \sin(\eta) \cdot \cos(m\eta) d\eta$$

Hat nun  $B(\eta)$  ebenfalls eine Darstellung

$$B(\eta) = \sum_{k=0}^M \hat{B}_k \cdot \cos(k\eta)$$

so wird

$$\begin{aligned} I_m &= \sum_{k=0}^M \hat{B}_k \int_0^{\pi} \sin(\eta) \cos(m\eta) \cos(k\eta) d\eta \\ &= \sum_{k=0}^M \hat{B}_k \cdot I_{m,k} \end{aligned}$$

mit

$$I_{m,k} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-k+m} + \frac{1}{1+k-m} + \frac{1}{1-k-m} + \frac{1}{1+k+m} \right) & , \quad k+m \equiv 0 \pmod{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die benötigten Fourier-Koeffizienten

$$\hat{p}_{n,m} \quad \text{und} \quad \hat{B}_n$$

lassen sich sehr einfach durch schnelle Fourier-Cosinus-Transformationen (DEVILLE und LABROSSE, 1982) berechnen. Weiterhin lassen sich die Integrale  $I_m$  im Voraus bestimmen, so daß sich das gesuchte Integral nach einer doppelten Cosinus-Transformation durch einfache Summation ergibt zu

$$I = \frac{L}{2} \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv 0 \pmod{2}}}^N \frac{1}{1-n^2} \left( \sum_{m=0}^M \hat{p}_{n,m} I_m \right)$$

## APPENDIX B

### Die räumliche Diskretisierung der elliptischen Operatoren

Gegeben sei ein Operator der allgemeinen Form 2.19

$$Lp = A(\tau, s) \frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} + B(\tau, s) \frac{\partial^2 p}{\partial \tau \partial s} + C(\tau, s) \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + D(\tau, s) \frac{\partial p}{\partial \tau} + E(\tau, s) \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$-1 \leq \tau, s \leq 1$$

Durch die Koordinatentransformation

$$\tau = \cos(\alpha) \quad , \quad s = \cos(\gamma)$$

erhält man zunächst

$$Lp = \tilde{A}(\alpha, \gamma) \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha^2} + \tilde{B}(\alpha, \gamma) \frac{\partial^2 p}{\partial \alpha \partial \gamma} + \tilde{C}(\alpha, \gamma) \frac{\partial^2 p}{\partial \gamma^2} + \tilde{D}(\alpha, \gamma) \frac{\partial p}{\partial \alpha} + \tilde{E}(\alpha, \gamma) \frac{\partial p}{\partial \gamma}$$

für  $0 \leq \alpha, \gamma \leq \pi$  mit

$$\tilde{A} = \frac{A}{\sin^2(\alpha)} \quad , \quad \tilde{B} = \frac{B}{\sin(\alpha) \sin(\gamma)} \quad , \quad \tilde{C} = \frac{C}{\sin^2(\gamma)}$$

$$\tilde{D} = -\frac{A \cos(\alpha)}{\sin^3(\alpha)} - \frac{D}{\sin(\alpha)} \quad , \quad \tilde{E} = -\frac{C \cos(\gamma)}{\sin^3(\gamma)} - \frac{E}{\sin(\gamma)}$$

Die Diskretisierung von  $L$  erfolgt dann auf dem äquidistanten Gitter

$$\alpha_i = i \cdot \Delta \alpha \quad , \quad \Delta \alpha = \frac{\pi}{N} \quad , \quad i = 1, \dots, N-1$$

$$\gamma_j = j \cdot \Delta \gamma \quad , \quad \Delta \gamma = \frac{\pi}{M} \quad , \quad j = 1, \dots, M-1$$



# APPENDIX B

und lautet zeilenweise

$$\left( \tilde{A} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{\tilde{A}_{i,j}}{\Delta x^2} \left( P_{i-1,j} - 2 \cdot P_{i,j} + P_{i+1,j} \right)$$

$$\begin{aligned} \left( \tilde{B} \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right)_{i,j} \longrightarrow & \frac{\tilde{B}_{i,j}}{2 \Delta x \Delta y} \cdot \left( \frac{1}{2} (1 - SB_{i,j}) P_{i-1,j-1} + SB_{i,j} \cdot P_{i,j-1} - \frac{1}{2} (1 + SB_{i,j}) P_{i+1,j-1} \right. \\ & + SB_{i,j} \cdot P_{i-1,j} - 2 \cdot SB_{i,j} \cdot P_{i,j} + SB_{i,j} \cdot P_{i+1,j} \\ & \left. - \frac{1}{2} (1 + SB_{i,j}) \cdot P_{i-1,j+1} + SB_{i,j} \cdot P_{i,j+1} + \frac{1}{2} (1 - SB_{i,j}) P_{i+1,j+1} \right) \end{aligned}$$

$$\left( \tilde{C} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right)_{i,j} \longrightarrow \frac{\tilde{C}_{i,j}}{\Delta y^2} \left( P_{i,j-1} - 2 P_{i,j} + P_{i,j+1} \right)$$

$$\begin{aligned} \left( \tilde{D} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{i,j} \longrightarrow & \frac{\tilde{D}}{2 \Delta x} \left( (1 + SD_{i,j}) \cdot P_{i+1,j} - 2 \cdot SD_{i,j} \cdot P_{i,j} \right. \\ & \left. - (1 - SD_{i,j}) P_{i-1,j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( \tilde{E} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{i,j} \longrightarrow & \frac{\tilde{E}}{2 \Delta y} \left( (1 + SE_{i,j}) \cdot P_{i,j+1} - 2 \cdot SE_{i,j} P_{i,j} \right. \\ & \left. - (1 - SE_{i,j}) \cdot P_{i,j-1} \right) \end{aligned}$$

## APPENDIX B

wobei gelten soll

$$SB_{i,j} = \text{signum}(\tilde{\lambda}_{i,j} \cdot \tilde{\beta}_{i,j})$$

$$SD_{i,j} = \text{signum}(\tilde{A}_{i,j} \cdot \tilde{D}_{i,j}) \cdot \alpha_x, \quad 0 \leq \alpha_x \leq 1$$

$$SE_{i,j} = \text{signum}(\tilde{A}_{i,j} \cdot \tilde{E}_{i,j}) \cdot \alpha_y, \quad 0 \leq \alpha_y \leq 1$$

Die ersten beiden Formen entsprechen normalen symmetrischen Diskretisierungen. Die Diskretisierung der gemischten Ableitung besteht aus zwei sieben-Punkt-Formen, die wechselweise so benutzt werden, daß der zentrale Punkt das gleiche Vorzeichen erhält wie in den einfachen zweiten Ableitungen. Die ersten Ableitungen werden als gewichtetes Mittel aus zentralen und "upstream"-Differenzen diskretisiert.  $\alpha = 0$  entspricht zentralen,  $\alpha = 1$  "upstream"-Differenzen. Für  $\alpha_x = \alpha_y = 0$  sind alle Terme konsistent von der Ordnung 2. Daraus resultiert der diskrete Operator

$$\begin{aligned} (L_{qp} P)_{i,j} = & AMM_{i,j} \cdot P_{i-1,j-1} + ASM_{i,j} \cdot P_{i,j-1} + APM_{i,j} \cdot P_{i+1,j-1} \\ & + AMD_{i,j} \cdot P_{i-1,j} + ASD_{i,j} \cdot P_{i,j} + APD_{i,j} \cdot P_{i+1,j} \\ & + AMP_{i,j} \cdot P_{i-1,j+1} + AP_{i,j} \cdot P_{i,j+1} + APP_{i,j} \cdot P_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

$$AM_{z,j} = \frac{\tilde{B}_{z,j}}{4\alpha\alpha_j} (1 - SB_{z,j})$$

$$AM_{z,j} = \frac{\tilde{C}_{z,j}}{\alpha_j^2} + \frac{\tilde{B}_{z,j}}{2\alpha\alpha_j} SB_{z,j} - \frac{\tilde{E}_{z,j}}{2\alpha_j} (1 - SE_{z,j})$$

$$APM_{z,j} = -\frac{\tilde{B}_{z,j}}{4\alpha\alpha_j} (1 + SB_{z,j})$$

$$AM_{z,j} = \frac{\tilde{A}_{z,j}}{\alpha_j^2} + \frac{\tilde{B}_{z,j}}{2\alpha\alpha_j} SB_{z,j} - \frac{\tilde{D}_{z,j}}{2\alpha} (1 - SD_{z,j})$$

$$ASAM_{z,j} = -2 \cdot \frac{\tilde{A}_{z,j}}{\alpha_j^2} - 2 \cdot \frac{\tilde{C}_{z,j}}{\alpha_j^2} - \frac{\tilde{B}_{z,j}}{\alpha\alpha_j} SB_{z,j} - \frac{\tilde{D}_{z,j}}{2\alpha} SB_{z,j} - \frac{\tilde{E}_{z,j}}{2\alpha_j} SE_{z,j}$$

$$APD_{z,j} = \frac{\tilde{A}_{z,j}}{\alpha_j^2} + \frac{\tilde{B}_{z,j}}{2\alpha\alpha_j} SB_{z,j} - \frac{\tilde{D}_{z,j}}{2\alpha} (1 + SD_{z,j})$$

$$AMP_{z,j} = -\frac{\tilde{B}_{z,j}}{4\alpha\alpha_j} (1 + SB_{z,j})$$

$$ASPD_{z,j} = \frac{\tilde{C}_{z,j}}{\alpha_j^2} + \frac{\tilde{B}_{z,j}}{2\alpha\alpha_j} SB_{z,j} + \frac{\tilde{E}_{z,j}}{2\alpha_j} (1 + SE_{z,j})$$

$$APD_{z,j} = \frac{\tilde{B}_{z,j}}{4\alpha\alpha_j} (1 - SB_{z,j})$$

## APPENDIX C

### Die ILU-Zerlegung von $L_{ap}$

Gesucht wird eine Zerlegung der Matrix des diskreten Operators  $L_{ap}$  in der Form

$$(L_{ap}) = U \cdot L + \tau$$

wobei  $U$  und  $L$  untere bzw. obere Dreiecksmatrizen sind. Für die neun-Punkte-Form von  $L_{ap}$  ergibt sich bei lexikographischer Anordnung der Gleichungen eine Bandstruktur mit jeweils vier oberen und unteren Nebendiagonalen und der Hauptdiagonalen.  $U$  und  $L$  werden festgelegt durch die Forderung, daß in  $U$  nur die unteren, in  $L$  nur die oberen gleichen Diagonalen besetzt wie in  $L_{ap}$ . Das Produkt  $U \cdot L$  hat dann lediglich vier zusätzliche Nebendiagonale, die den Defekt der Zerlegung  $\tau$  ergeben. Die Struktur der beteiligten Matrizen ist in Abb. C1 wiedergegeben. Diese Zerlegung wird eindeutig, wenn man zusätzlich die Hauptdiagonale von  $L$  fest vorgibt. In diesem Fall wurde sie zu 1 gesetzt.

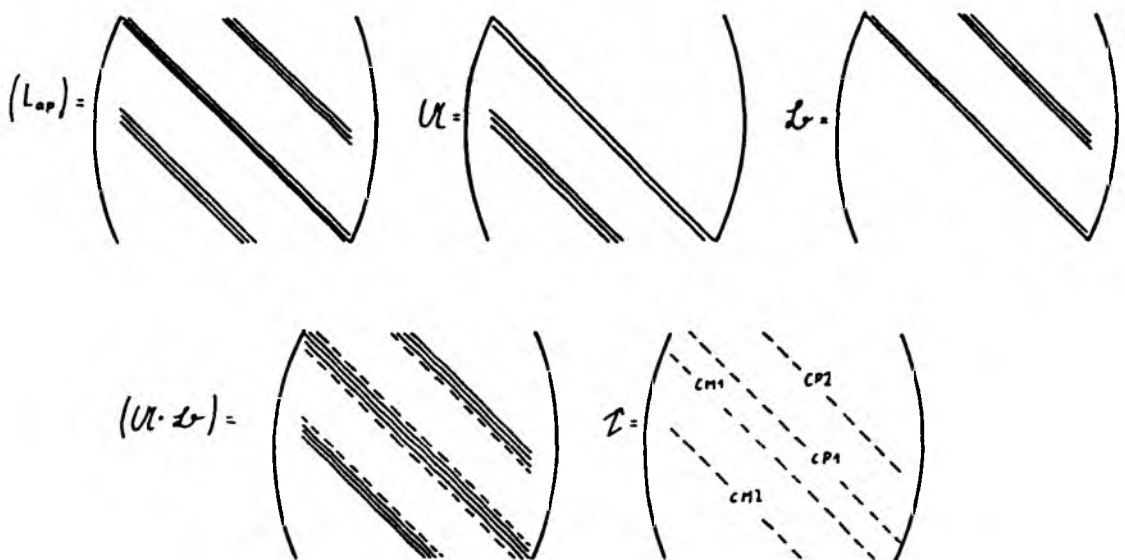


Abb. C.1 Matrix-Struktur der ILU-Zerlegung

# APPENDIX C

Liegen dann die neun Diagonalen von  $L_{op}$  (von unten nach oben) vor in der Form

$$LMM_{i,j}, L\emptyset M_{i,j}, LPM_{i,j}, LM\emptyset_{i,j}, L\emptyset\emptyset_{i,j}, LP\emptyset_{i,j}, LMP_{i,j}, L\emptyset P_{i,j}, LPP_{i,j},$$

so lassen sich die Diagonalelemente von  $U, \mathcal{L}, \mathcal{T}$  rekursiv bestimmen:

$$AMM_{i,j} = LMM_{i,j}$$

$$A\emptyset M_{i,j} = L\emptyset M_{i,j} - AMM_{i,j} \cdot BPP_{i-1,j-1}$$

$$APM_{i,j} = LPM_{i,j} - A\emptyset M_{i,j} \cdot BPP_{i,j-1}$$

$$A\emptyset\emptyset_{i,j} = LM\emptyset_{i,j} - A\emptyset M_{i,j} \cdot BMP_{i,j-1} - AMM_{i,j} \cdot B\emptyset P_{i-1,j-1}$$

$$A\emptyset\emptyset_{i,j} = L\emptyset\emptyset_{i,j} - A\emptyset\emptyset_{i,j} \cdot BPP_{i-1,j} - APM_{i,j} \cdot BMP_{i+1,j-1} - A\emptyset M_{i,j} \cdot B\emptyset P_{i,j-1} \\ - AMM_{i,j} \cdot BPP_{i-1,j-1}$$

$$BPP_{i,j} = A\emptyset\emptyset_{i,j}^{-1} \cdot (LP\emptyset_{i,j} - APM_{i,j} \cdot B\emptyset P_{i+1,j-1} - A\emptyset M_{i,j} \cdot BPP_{i,j-1})$$

$$BMP_{i,j} = A\emptyset\emptyset_{i,j}^{-1} \cdot (LMP_{i,j} - A\emptyset\emptyset_{i,j} \cdot B\emptyset P_{i-1,j})$$

$$B\emptyset P_{i,j} = A\emptyset\emptyset_{i,j}^{-1} \cdot (L\emptyset P_{i,j} - A\emptyset\emptyset_{i,j} \cdot BPP_{i-1,j})$$

$$BPP_{i,j} = A\emptyset\emptyset_{i,j}^{-1} \cdot LPP_{i,j}$$

$$CM2_{i,j} = APM_{i,j} \cdot BPP_{i+1,j-1}$$

$$CM1_{i,j} = AMM_{i,j} \cdot BMP_{i-1,j-1}$$

$$CP1_{i,j} = APM_{i,j} \cdot BPP_{i+1,j-1}$$

$$CP2_{i,j} = A\emptyset\emptyset_{i,j} \cdot BMP_{i-1,j}$$

$$B\emptyset\emptyset_{i,j} = 1$$

Dabei läuft  $i$  zuerst. Alle nichtdefinierten Größen sind Null.

## APPENDIX D

### Konstruktion von $L_{ap}$ auf größeren Gittern

Liegt  $L_{ap}$  auf dem Gitter  $k$  vor und werden die Restriktionen 2.25 und Prolongationen 2.26 verwendet, so lässt sich der Operator auf dem Gitter  $k-1$  definieren als

$$L_{ap_{k-1}} = R_k^{k-1} \cdot L_{ap_k} \cdot P_{k-1}^k$$

Ist dieser  $L_{ap_k}$  ein neun-Punkt-Operator der Form

$$\begin{aligned} (L_{ap_k} P_k)_{i,j} = & AMM_{k,i,j} \cdot P_{k,i,j} + ADM_{k,i,j} \cdot P_{k,i,j-1} + APM_{k,i,j} \cdot P_{k,i+1,j} \\ & + AM\emptyset_{k,i,j} \cdot P_{k,i,j} + A\emptyset\emptyset_{k,i,j} \cdot P_{k,i,j} + A\emptyset\emptyset_{k,i,j} \cdot P_{k,i+1,j} \\ & + AMP_{k,i,j} \cdot P_{k,i,j+1} + A\emptyset P_{k,i,j} \cdot P_{k,i,j+1} + APP_{k,i,j} \cdot P_{k,i+1,j+1} \end{aligned}$$

so wird durch die obige Vorschrift  $L_{ap_{k-1}}$  ebenfalls ein neun-Punkt-Operator, dessen Komponenten lauten:

$$\begin{aligned} AMM_{k-1,i,j} = & \frac{1}{16} SM_{k,i,j} + \frac{1}{64} A\emptyset\emptyset_{k,i,j} \\ & + \frac{1}{32} \left( A\emptyset M_{k,i,j} + A\emptyset M_{k,i,j} + AM\emptyset_{k,i,j} + AM\emptyset_{k,i,j} \right) \\ APP_{k-1,i,j} = & \frac{1}{16} SPM_{k,i,j} + \frac{1}{64} A\emptyset\emptyset_{k,i,j} \\ & + \frac{1}{32} \left( A\emptyset M_{k,i,j} + A\emptyset M_{k,i,j} + A\emptyset\emptyset_{k,i,j} + A\emptyset\emptyset_{k,i,j} \right) \\ AMP_{k-1,i,j} = & \frac{1}{16} SMP_{k,i,j} + \frac{1}{64} A\emptyset\emptyset_{k,i,j} \\ & + \frac{1}{32} \left( AM\emptyset_{k,i,j} + AM\emptyset_{k,i,j} + A\emptyset P_{k,i,j} + A\emptyset P_{k,i,j} \right) \\ APP_{k-1,i,j} = & \frac{1}{16} SPP_{k,i,j} + \frac{1}{64} A\emptyset\emptyset_{k,i,j} \\ & + \frac{1}{32} \left( A\emptyset P_{k,i,j} + A\emptyset P_{k,i,j} + A\emptyset\emptyset_{k,i,j} + A\emptyset\emptyset_{k,i,j} \right) \end{aligned}$$

# APPENDIX D

$$\begin{aligned} A\partial M_{k-1, i, j} = & \frac{1}{16} \cdot \left( SMM_{k, k-1} + SPM_{k, k-1} + A\partial M_{k, k-1} + A\partial M_{k, k} + A\partial M_{k, k+1} \right) \\ & + \frac{1}{32} \left( S\partial M_{k, k-1} + S\partial M_{k, k} + A\partial M_{k, k-1} + A\partial M_{k, k} + A\partial P_{k, k-1} + A\partial P_{k, k} \right) \\ & + \frac{1}{64} \left( A\partial M_{k, k-1} + A\partial M_{k, k+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\partial M_{k-1, i, j} = & \frac{1}{16} \cdot \left( SMM_{k, k-1} + SPM_{k, k-1} + A\partial M_{k, k-1} + A\partial M_{k, k} + A\partial M_{k, k+1} \right) \\ & + \frac{1}{32} \left( S\partial M_{k, k-1} + A\partial M_{k, k} + A\partial M_{k, k+1} + A\partial P_{k, k-1} + A\partial P_{k, k} + S\partial P_{k, k} \right) \\ & + \frac{1}{64} \left( A\partial M_{k, k-1} + A\partial M_{k, k+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\partial P_{k-1, i, j} = & \frac{1}{16} \left( SPM_{k, k} + SPP_{k, k-1} + A\partial P_{k, k} + A\partial P_{k, k} + A\partial M_{k, k} \right) \\ & + \frac{1}{32} \left( S\partial P_{k, k-1} + S\partial P_{k, k} + A\partial M_{k, k} + A\partial M_{k, k+1} + A\partial P_{k, k-1} + A\partial P_{k, k} \right) \\ & + \frac{1}{64} \left( A\partial P_{k, k-1} + A\partial P_{k, k+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\partial P_{k-1, i, j} = & \frac{1}{16} \left( SPM_{k, k} + SPP_{k, k-1} + A\partial P_{k, k} + A\partial P_{k, k} + A\partial M_{k, k+1} \right) \\ & + \frac{1}{32} \left( S\partial P_{k, k-1} + S\partial P_{k, k} + A\partial M_{k, k+1} + A\partial M_{k, k+1} + A\partial P_{k, k-1} + A\partial P_{k, k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\partial P_{k-1, i, j} = & \frac{1}{4} A\partial P_{k, k} + \frac{1}{16} \left( A\partial M_{k, k-1} + A\partial M_{k, k} + A\partial P_{k, k} + A\partial P_{k, k+1} \right) \\ & + \frac{1}{64} \left( A\partial M_{k, k-1} + A\partial M_{k, k} + A\partial P_{k, k-1} + A\partial P_{k, k+1} \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{16} \left( A\partial M_{k, k} + A\partial M_{k, k+1} \right) + \frac{1}{32} \left( S\partial M_{k, k-1} + S\partial M_{k, k} \right)$$

$$+ \frac{1}{16} \left( A\partial M_{k, k} + A\partial M_{k, k+1} \right) + \frac{1}{32} \left( S\partial M_{k, k-1} + S\partial M_{k, k} \right)$$

$$+ \frac{1}{16} \left( A\partial P_{k, k-1} + A\partial P_{k, k} \right) + \frac{1}{32} \left( S\partial P_{k, k-1} + S\partial P_{k, k} \right)$$

$$+ \frac{1}{16} \left( A\partial P_{k, k-1} + A\partial P_{k, k} \right) + \frac{1}{32} \left( S\partial P_{k, k-1} + S\partial P_{k, k} \right)$$

$$+ \frac{1}{16} \left( SMM_{k, k} + SPM_{k, k-1} + SMP_{k, k-1} + SPP_{k, k-1} \right)$$

# APPENDIX D

für  $1 \leq i \leq N_k$  ,  $1 \leq j \leq M_k$

und mit den Abkürzungen  $h = 2i$  ,  $m = 2j$  und

$$SI\gamma_{h,m} = 4I\gamma_{h,m} + 4I\gamma_{h+1,m} + 4I\gamma_{h,m+1} + 4I\gamma_{h+1,m+1}$$

$$I, \gamma = M, \emptyset, \rho$$



## APPENDIX E

### Vergleichslösungen mit massenerhaltender Randbedingung

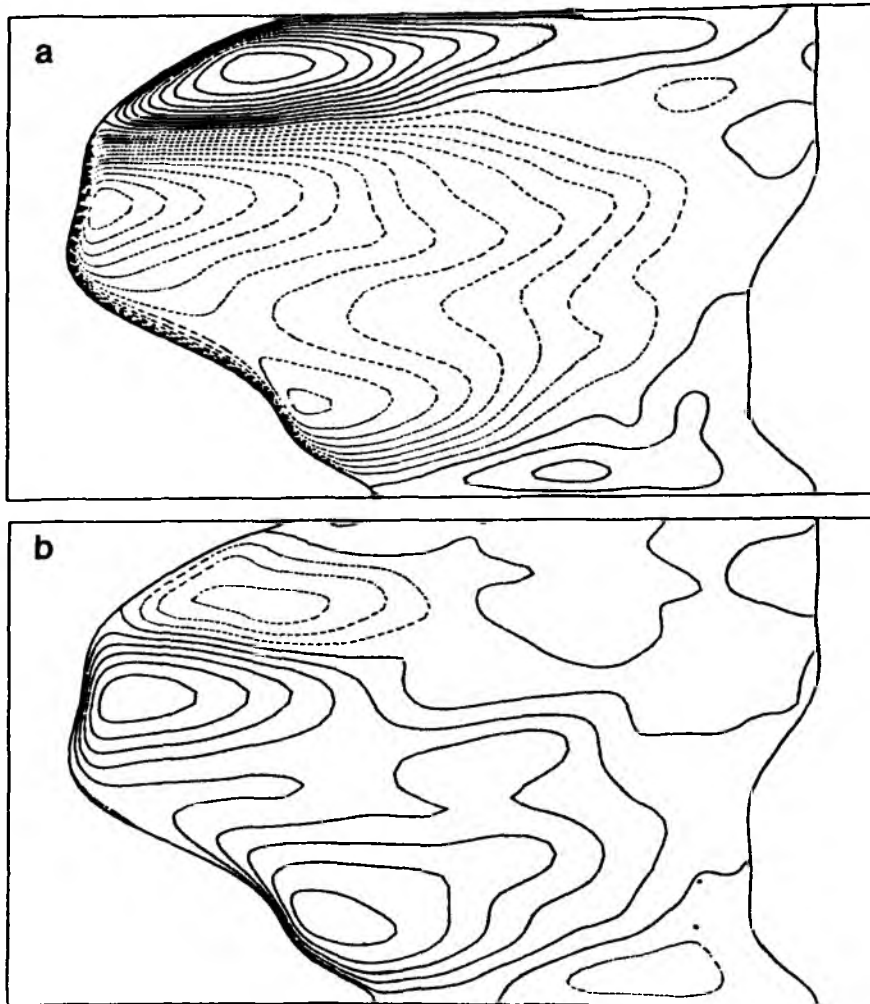


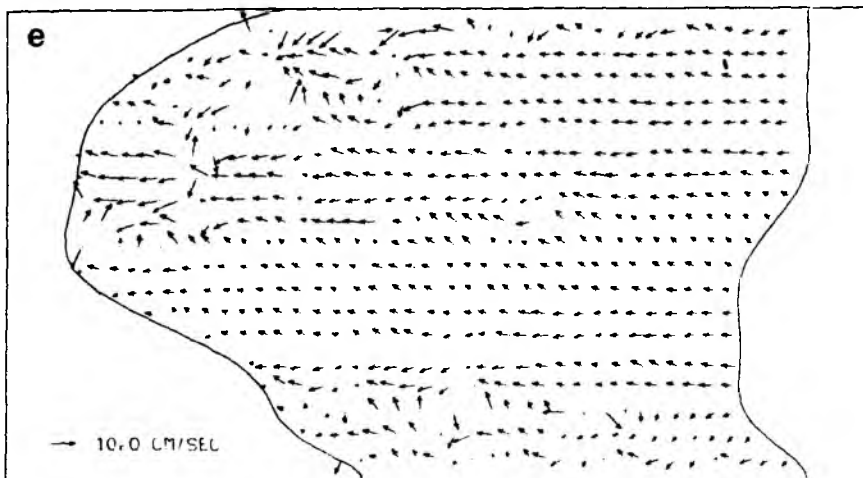
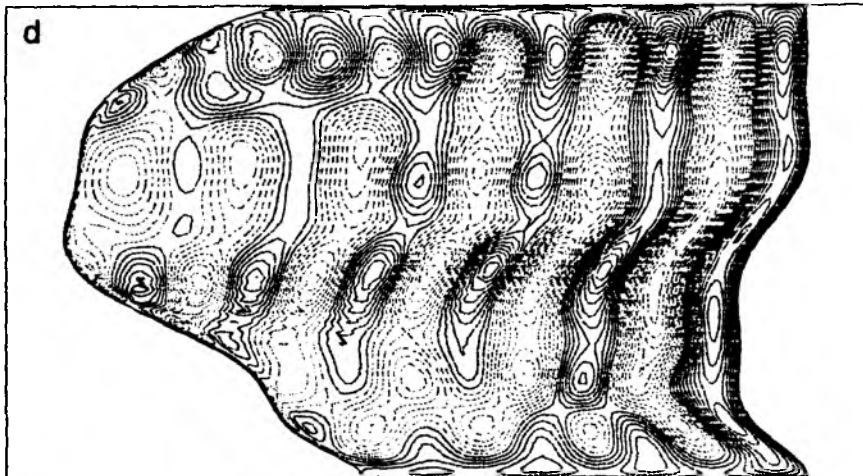
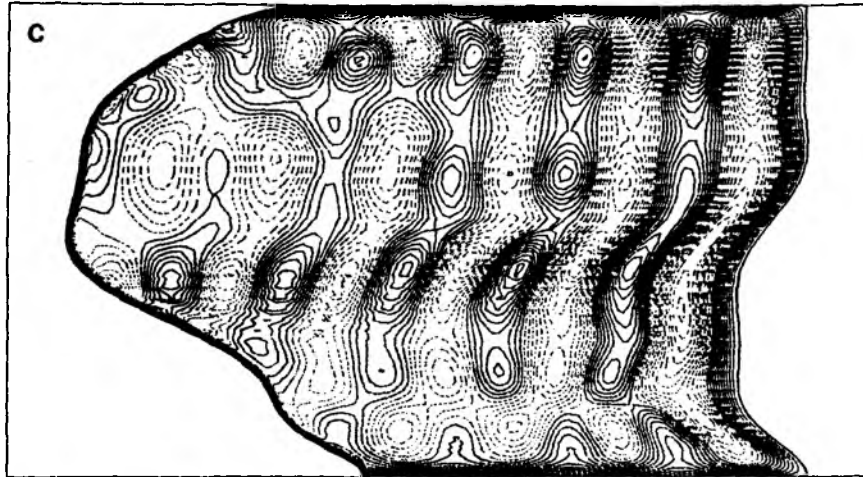
Abb. E.1 Lösung auf der  $\beta$ -Ebene ohne Topographie

- a) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_3$
- b) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_0$
- c) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_3$
- d) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_0$

Linienabstand jeweils  $100 \text{ g cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}$

- e) Lokale Phasengeschwindigkeiten des baroklinen Druckfeldes  
(Geschwindigkeiten größer 10 cm/sec sind ausgeblendet)

# APPENDIX E



# APPENDIX E

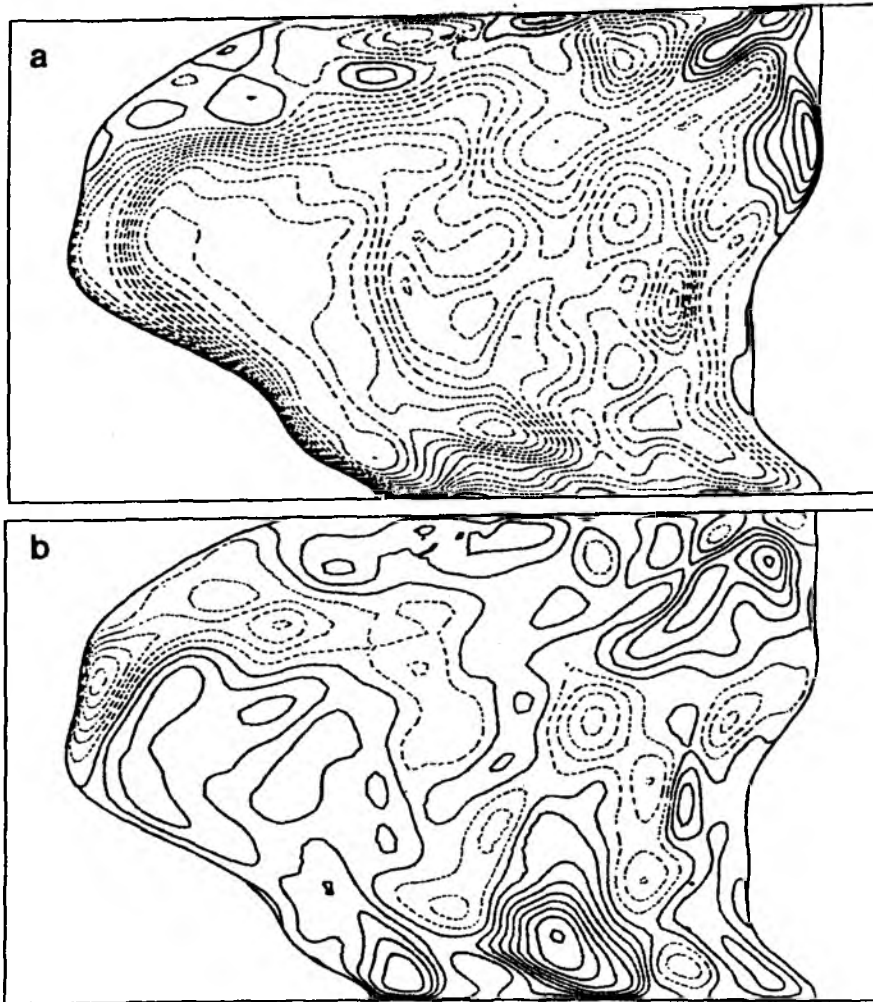


Abb. E.2 Lösung auf der  $\beta$ -Ebene mit Topographie

a) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_3$

b) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_0$

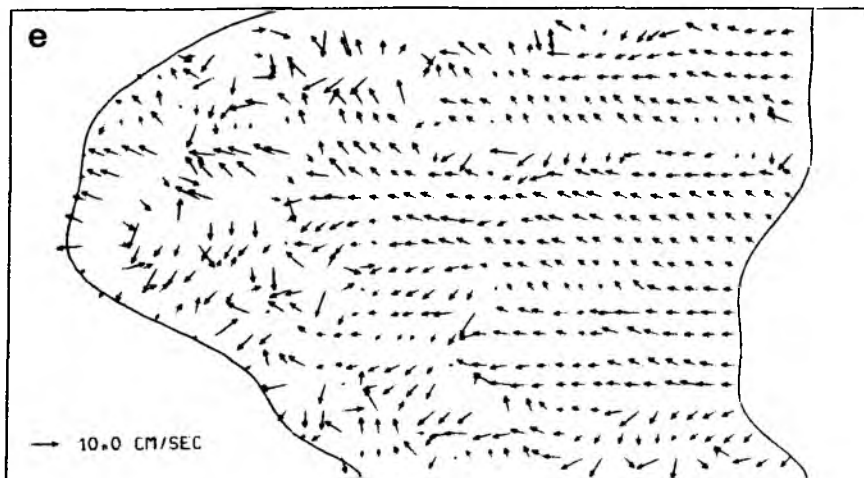
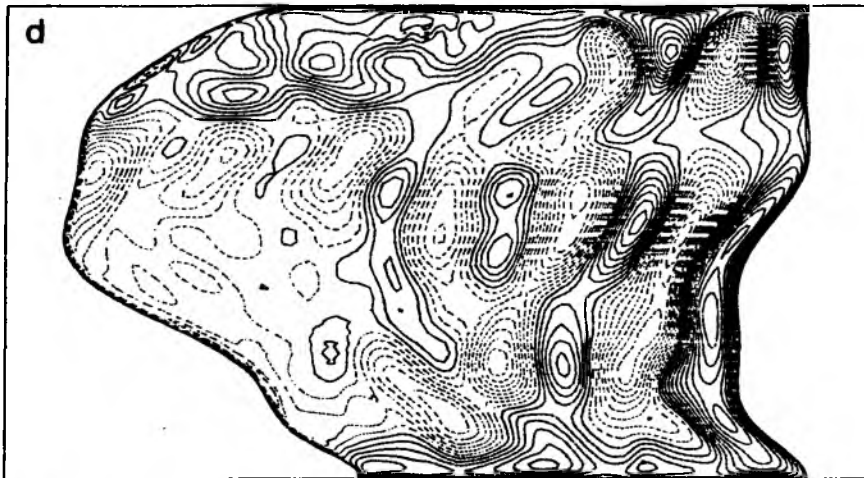
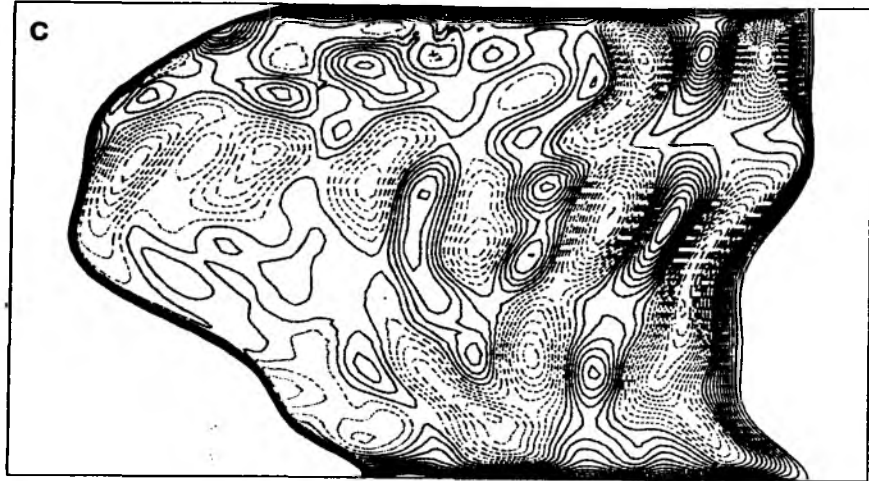
c) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_3$

d) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_0$

Linienabstand jeweils  $100 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \text{sec}^{-2}$

e) Lokale Phasengeschwindigkeiten des baroklinen Druckfeldes  
(Geschwindigkeiten größer 10 cm/sec sind ausgeblendet)

# APPENDIX E



## APPENDIX E

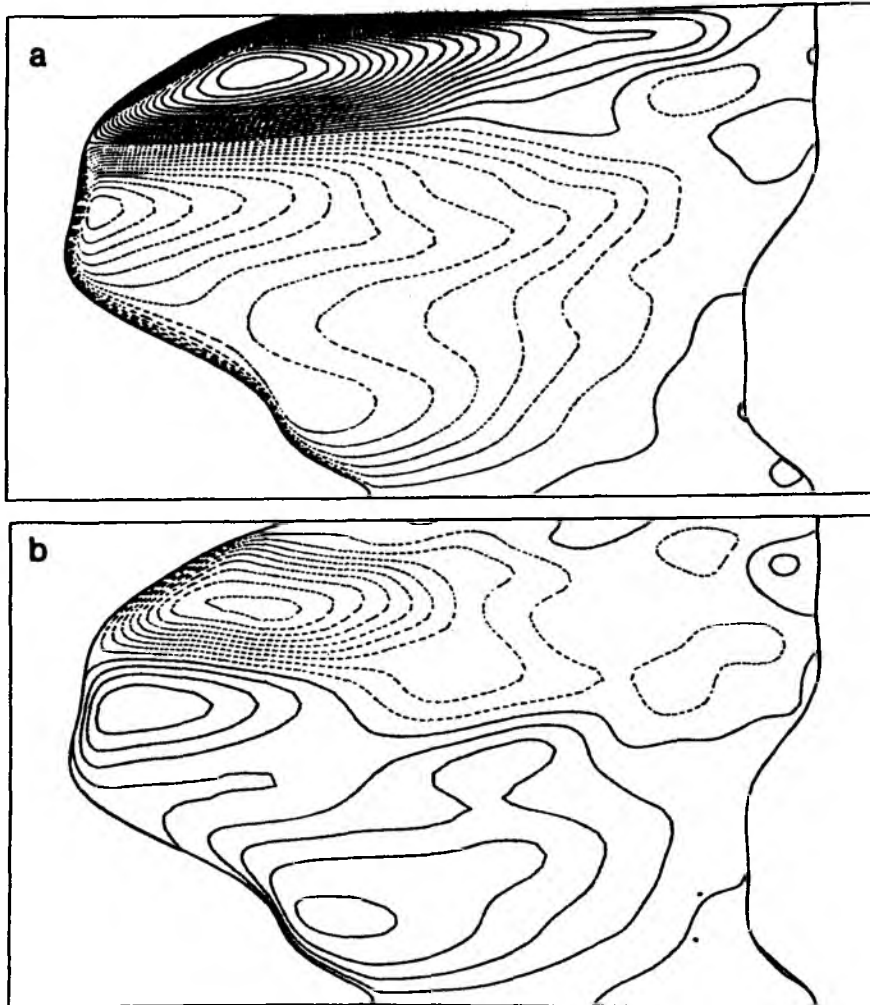


Abb. E.3 Lösung auf der Kugel ohne Topographie

a) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $p_0$ ,  $t = t_3$

b) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $p_0$ ,  $t = t_0$

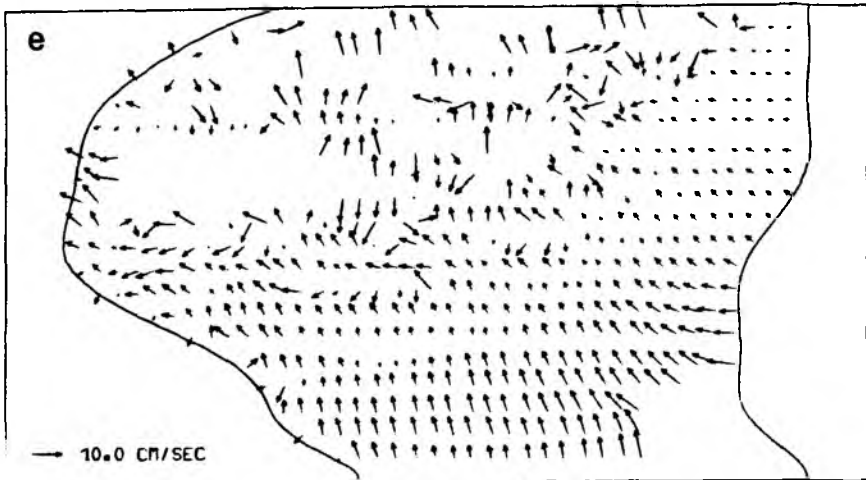
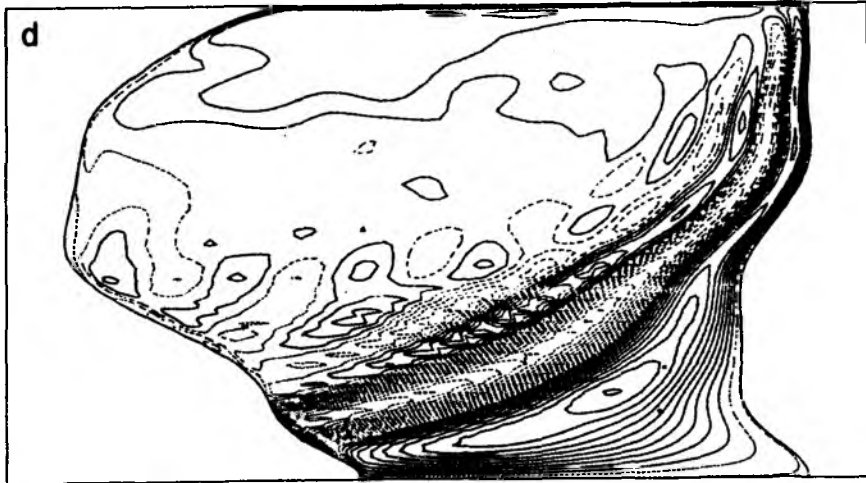
c) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $p_1$ ,  $t = t_3$

d) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $p_1$ ,  $t = t_0$

Linienabstand jeweils  $100 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2}$

e) Lokale Phasengeschwindigkeiten des baroklinen Druckfeldes  
(Geschwindigkeiten größer 10 cm/sec sind ausgeblendet)

# APPENDIX E



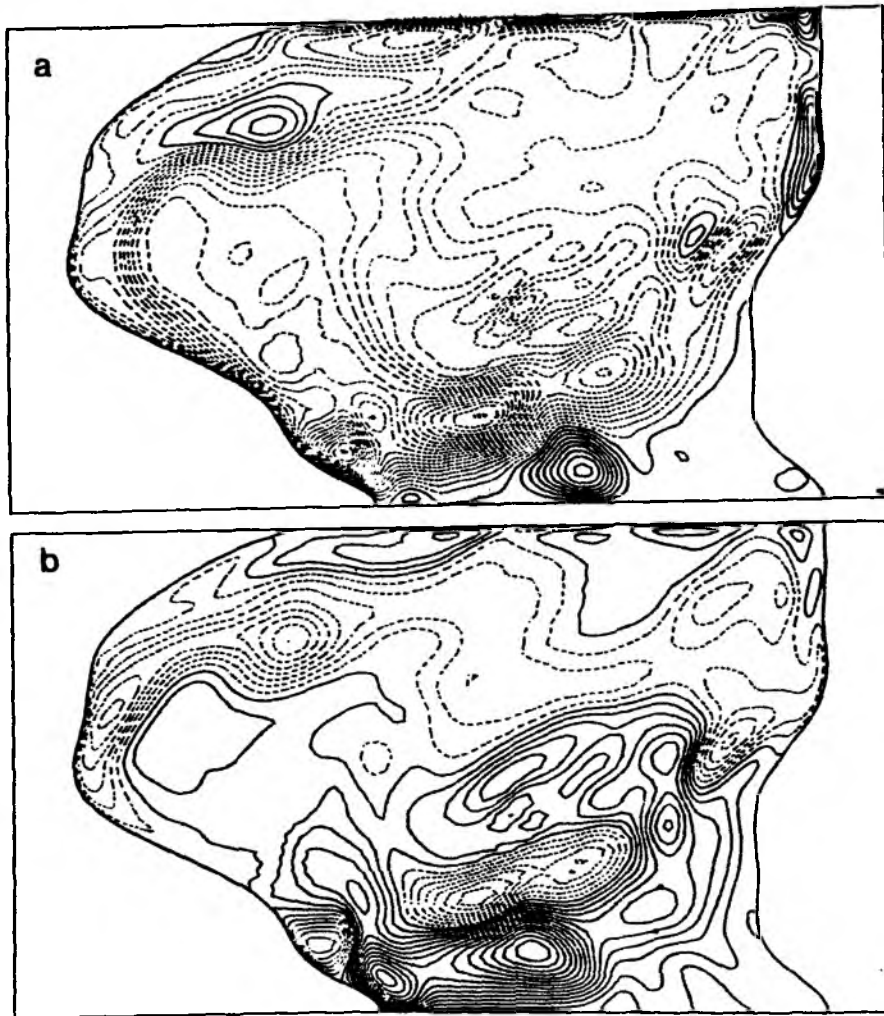


Abb. E.4 Lösung auf der Kugel mit Topographie

a) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_3$

b) Amplitude des barotropen Druckfeldes  $P_0$ ,  $t = t_0$

c) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_3$

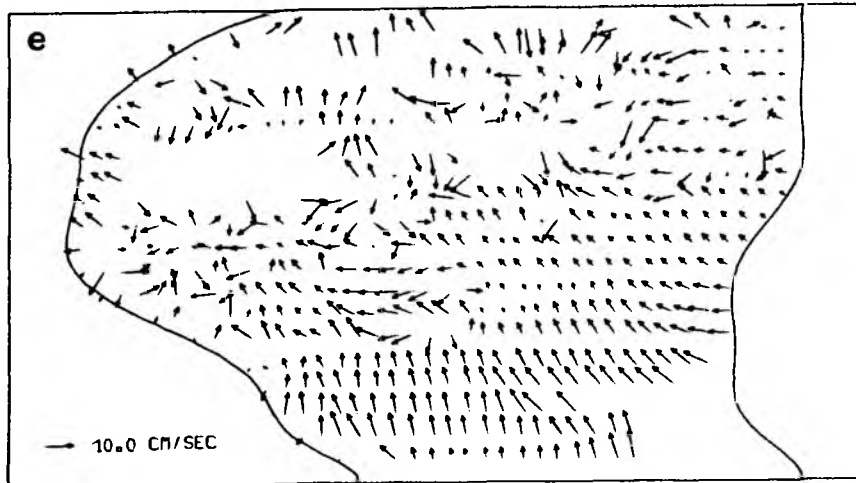
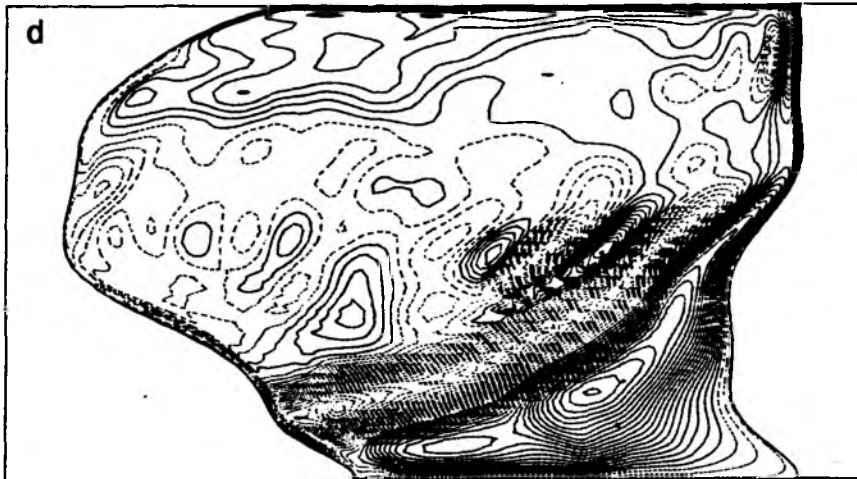
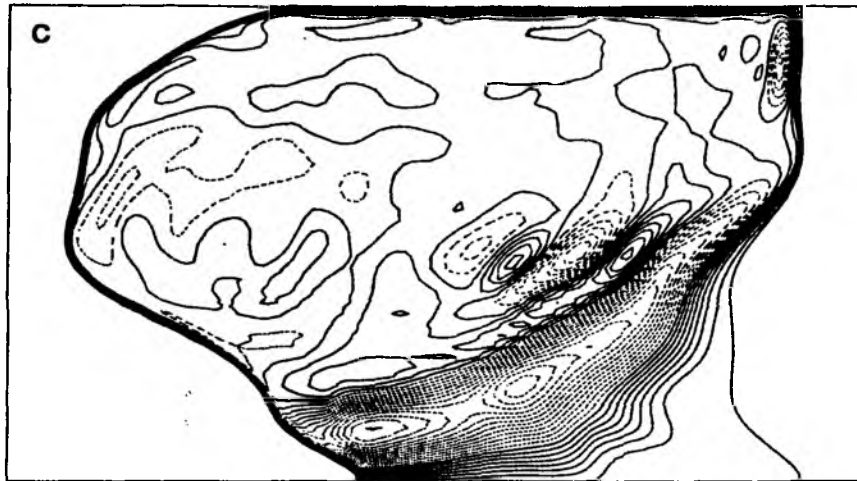
d) Amplitude des baroklinen Druckfeldes  $P_1$ ,  $t = t_0$

Linienabstand jeweils  $100 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-2}$

e) Lokale Phasengeschwindigkeiten des baroklinen Druckfeldes  
(Geschwindigkeiten größer  $10 \text{ cm/sec}$  sind ausgeblendet)



# APPENDIX E





## LITERATUR

- ABRAMOWITZ, M. & I.A. STEGUN, 1964: Handbook of Mathematical Functions. National Bureau of Standards, Washington D.C.
- ANDERSON, D.L.T. & R.A. CORRY, 1985a: Ocean response to low frequency wind forcing with application to the seasonal variation in the Florida Straits - Gulf Stream transport. Prog. Oceanog. 14, 7-40.
- ANDERSON, D.L.T. & R.A. CORRY, 1985b: Seasonal transport variations in the Florida Straits: A model study. J. Phys. Oceanogr. 15, 773-786.
- ANDERSON, D.L.T., K. BRYAN, A.E. GILL & R.C. PACANOWSKI, 1979: The transient response of the North Atlantic - some model studies. J. Geophys. Res. 84, 4795-4815.
- BÖNING, C., 1985: Eine Untersuchung der Dynamik der windgetriebenen ozeanischen Zirkulation mit einem wirbelauflösenden Modell. Ber. Inst. Meereskd. Kiel Nr. 137, 149pp.
- BRANDT, A., 1984: Multigrid Techniques: 1984 Guide with Applications to Fluid Dynamics. GMD-Studien Nr. 85.
- BRANDT, A. & N. DINAR, 1979: Multigrid solutions to elliptic flow problems. In: S. Parter (Hrsg.), Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press, 53-147.
- BRYAN, K. & P. RIPA, 1978: The vertical structure of North Pacific temperature anomalies. J. Geophys. Res. 83, 2419-2429.
- CAMERLENGO, A.L. & J.J. O'BRIEN, 1980: Open boundary conditions in rotating fluids. J. Comput. Phys. 35, 12-35.
- CUMMINS, P.F., L.A. MYSAK & K. HAMILTON, 1986: Wind-stress-curl generation of annual Rossby waves in the North Pacific. J. Phys. Oceanogr. (eingereicht).

- DEVILLE, M. & G. LABROSSE, 1982: An algorithm for the evaluation of multidimensional (direct and inverse) discrete Chebyshev transforms. *J. Comput. Appl. Math.* 8 (4), 293-304.
- EMERY, W.J., 1983: On the geophysical variability of the upper level mean and eddy fields in the North Atlantic and the North Pacific. *J. Phys. Oceanogr.* 13, 269-291.
- EMERY, W.J. & L. MAGAARD, 1976: Baroclinic Rossby waves as inferred from temperature fluctuations in the Eastern Pacific. *J. Mar. Res.* 34, 365-385.
- EMERY, W.J., G.W. LEE & L. MAGAARD, 1984: Geographic and seasonal distributions of Brunt-Väisälä frequency and Rossby radii in the North Pacific and North Atlantic. *J. Phys. Oceanogr.* 14, 294-317.
- FLIERL, G.R., 1977: Simple applications of McWilliams' "A note on a consistent quasi-geostrophic model in a multiply connected domain". *Dyn. Atm. Oceans* 1, 443-453.
- FLIERL, G.R., 1978: Models of vertical structure and the calibration of two-layer models. *Dyn. Atm. Oceans* 2, 341-381.
- FRANKIGNOUL, C. & P. MÜLLER, 1979a: Quasi-geostrophic response of an infinite  $\beta$ -plane ocean to stochastic forcing by the atmosphere. *J. Phys. Oceanogr.* 9, 104-127.
- FRANKIGNOUL, C. & P. MÜLLER, 1979b: On the generation of geostrophic eddies by surface buoyancy flux anomalies. *J. Phys. Oceanogr.* 9, 1207-1213.
- GARROW, B.S., J.M. BOYLE, J.J. DONGARRA & C.B. MOLER, 1977: Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide Extension. Lecture Notes in Computer Science 51, Springer, Berlin.
- GILL, A.E., 1982: Atmosphere-Ocean Dynamics. Academic Press, London.

- GOTTLIEB, D. & S.A. ORSZAG, 1977: Numerical analysis of spectral methods: Theory and applications. CBMS-NSF Monograph number 26, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- GOTTLIEB, D. & E. TURKEL, 1980: On time discretizations for spectral methods. Stud. Applied Math. 63, 67-86.
- HAIDVOGEL, D.B., 1977: Quasigeostrophic regional and general circulation modelling: an efficient pseudospectral approximation technique. In: Computing Methods in Geophysical Mechanics, AMD volume 25, the American Society of Mechanical Engineers, New York.
- HALDENWANG, P., G. LABROSSE & S. ABBOUDI, 1984: Chebyshev 3-D spectral and 2-D pseudospectral solvers for the Helmholtz equation. J. Comput. Phys. 55, 115-128.
- HOLLAND, W.R., D.E. HARRISON & A.J. SEMTNER Jr., 1983: Eddy-resolving numerical models of large-scale ocean circulation. In: A.R. Robinson (Hrsg.), Eddies in Marine Science, Springer, Berlin.
- ISEMER, H.J. & L. HASSE, 1986: The Bunker climatic atlas of the North Atlantic ocean. Vol 2: air-sea interactions. Springer Verlag, Berlin (im Druck).
- KANG, Y.Q & L. MAGAARD, 1980: Annual baroclinic Rossby waves in the central North Pacific. J. Phys. Oceanogr. 10, 1159-1167
- KRAUSS, W., 1985: Spektralmodell des Nordatlantiks. In: Arbeits- und Ergebnisbericht 1983-84-85 "Warmwassersphäre des Atlantiks", Christian-Albrechts-Universität, Kiel, 16-49.
- KRAUSS, W. & CHR. WÜBBER, 1982a: Response of the North Atlantic to annual wind variations along the eastern coast. Deep-Sea Res. 29, 851-868.

- KRAUSS, W. & CHR. WÜBBER, 1982b: A semispectral model on the  $\beta$ -plane. Dt. hydrogr. Z. 35, 187-201.
- KRAUSS, W. & CHR. WÜBBER, 1982c: A detailed description of a semispectral model on the  $\beta$ -plane. Ber. Inst. Meereskd. Kiel Nr. 104
- LeBLOND, P.H. & L.A. MYSAK, 1978: Waves in the Ocean. Elsevier, 602pp.
- LEVITUS, S., 1982: Climatological atlas of the world ocean. NOAA Tech. Pap. 3, 173pp.
- LIPPERT, A., 1986: Erzeugung niederfrequenter ozeanischer Variabilität durch fluktuierende Windfelder (Dissertation, Kiel).
- LIPPERT, A. & R.H. KÄSE, 1985: Stochastic wind forcing of baroclinic Rossby waves in the presence of a meridional boundary. J. Phys. Oceanogr. 15, 184-194.
- MAGAARD, L., 1977: On the generation of baroclinic Rossby waves in the ocean by meteorological forces. J. Phys. Oceanogr. 7, 359-364.
- MAGAARD, L., 1983: On the potential energy of baroclinic Rossby waves in the North Pacific. J. Phys. Oceanogr. 13, 38-42.
- MAGAARD, L. & J.M. PRICE, 1977: Note on the significance of a previous Rossby wave fit of internal temperature fluctuations in the Eastern Pacific. J. Mar. Res. 35(4), 649-651.
- MALIK, M.R., T.A.ZANG & M.Y. HUSSAINI, 1985: A spectral collocation method for the Navier-Stokes equations. J. Comp. Phys. 61, 64-88.
- McWILLIAMS, J.C., 1976: Large-scale inhomogeneities and mesoscale ocean waves: a single stable wave field. J. Mar. Res. 34, 423-456.

- McWILLIAMS, J.C., 1977: A note on a consistent quasigeostrophic model in a multiply connected domain. *Dyn. Atm. Oceans* 1, 427-441.
- MEIJERINK, J.A. & H.A. v.d.VORST, 1981: Guidelines for the usage of incomplete decompositions in solving sets of linear equations as they occur in practical problems. *J. Comp. Phys.* 44, 134-155.
- MÜLLER, P. & C. FRANKIGNOUL, 1981: Direct atmospheric forcing of geostrophic eddies. *J. Phys. Oceanogr.* 11, 287-308.
- MYSAK, L.A., 1983: Generation of annual Rossby waves in the North Pacific. *J. Phys. Oceanogr.* 13, 1908-1923.
- MYSAK, L.A. & L. MAGAARD, 1983: Rossby wave driven eulerian mean flows along non-zonal barriers with application to the Hawaiian Ridge. *J. Phys. Oceanogr.* 13, 1761-1725.
- O'BRIEN, J.J. & R. GROTHJAHN, 1976: Some inaccuracies in finite differencing hyperbolic equations. *Monthly Weather Review*, 104, Nr. 2.
- ORSZAG, S.A., 1970: Transform method for the calculation of vector-coupled sums: application to the spectral form of the vorticity equation. *J. Atmos. Sci.* 27, 890-895.
- ORSZAG, S.A., 1979: Spectral methods for problems in complex geometrics. In: S.V. Parter (Hrsg.), *Numerical methods for Partial Differential Equations*. Academic Press, New York.
- PEDLOSKY, J., 1979: *Geophysical fluid dynamics*. Springer-Verlag, New York.
- PHILANDER, S.G.H., 1978: Forced oceanic waves. *Reviews of Geophysics and Space Physics* 16, 15-46.
- PRICE, J.M. & L. MAGAARD, 1980: Rossby wave analysis of the baroclinic potential energy in the upper 500 meters of the North Pacific. *J. Mar. Res.* 38, 249-264.

- PRICE, J.M. & L. MAGAARD, 1983: Rossby wave analysis of subsurface temperature fluctuations along the Honolulu-San Francisco Great Circle. J. Phys. Oceanogr. 13, 258-268.
- PRICE, J.M. & L. MAGAARD, 1986: Interannual baroclinic Rossby waves in the mid-latitude North Atlantic. J. Phys. Oceanogr. (eingereicht).
- ROGERS, C.F., 1985: Quasi-geostrophic ocean models employing spectral methods Part 1 - Theoretical background. Rutherford Appleton Laboratory. RAL-85-003, 57pp.
- SCHOPF, P.S., D.L.T. ANDERSON & R. SMITH, 1981: Beta-dispersion of low-frequency Rossby-waves. Dyn. Atmos. Ocean. 5, 187-214.
- SCHULMAN, E.E. & P.P. NIILER, 1970: Topographic effects on the wind-driven ocean circulation. Geophysical Fluid Dynamics Vol.1, pp.439-462.
- SMITH, B.T., J.M. BOYLE, J.J. DONGARRA, B.S. GARBOW, Y. IKEBE, V.C. KLEMA & C.B. MOLER, 1976: Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide. Lectures in Computer Science 6. Springer, Berlin.
- STÜBEN, K. & U. TROTTEBERG, 1982: Multigrid methods: fundamental algorithms, model problem analysis and applications. In: W. Hackbusch, U. Trottenberg (Hrsg.), Lecture Notes in Math. 960, Springer, Berlin.
- SUGINOHARA, N., 1981: Quasi-geostrophic waves in a stratified ocean with bottom topography. J. Phys. Oceanogr. 11, 107-115.
- THOMPSON, J.F. & Z.U.A. WARSI, 1982: Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equations - a review. J. of Comp. Phys. 47, 1-108.
- VERONIS, G., 1981: Dynamics of large-scale ocean circulations. In: Bruce A. Warren, Carl Wunsch (Hrsg.), Evolution of Physical Oceanography, The MIT Press, Cambridge.

- WESSELING, P., 1982: A robust and efficient multigrid method. In: W. Hackbusch, U. Trottenberg (Hrsg.), Multigrid Methods, Lecture Notes in Math. 960, Springer, Berlin.
- WESSELING, P. & P. SONNEVELD, 1980: Numerical experiments with a multiple grid and a preconditioned Lanczos type method. In: R. Rautmann (Hrsg.), Approximation Methods for Navier-Stokes Problem, Lecture Notes in Math. 771, Springer, Berlin.
- WESTLAKE, J., 1968: A Handbook of Numerical Matrix Inversion and Solution of Linear Equations, Wiley & Sons, New York.
- WHITE, W.B., 1977: Annual forcing of baroclinic long waves in the tropical North Pacific. J. Phys. Oceanogr. 7, 50-61.
- WHITE, W.B., 1982: Traveling wave-like mesoscale perturbations in the North Pacific Current. J. Phys. Oceanogr. 12, 231-243.
- WHITE, W.B. & J.F.T. SAUR, 1981: A source of annual baroclinic waves in the Eastern Subtropical North Pacific. J. Phys. Oceanogr. 11, 1452-1462.
- WILLEBRANDT, J., 1981: Zur Erzeugung großräumiger Strömungsschwankungen in mittleren Breiten durch veränderliche Windfelder. Ber. Inst. Meereskd. Kiel Nr. 83.
- ZANG, T.A., Y.S. WONG & M.Y. HUSSAINI, 1982: Spectral multigrid methods for elliptic equations. J. Comp. Phys. 48, 485-501.